INHALTSÜBERSICHT

A. Verfasserverzeichnis

(H. = Hauptaufsätze, Z. B. = Zusammenfassender Bericht, Kl. M. = Kleine Mitteilungen, Bb. = Buchbesprechungen, N. = Nachrichten, Z. = Zuschriften an den Herausgeber.)

	Seite
Beyer, K. E. Melan u. R. Schindler, Die genaue Berechnung von Trägerrosten, mit 39 Taf. für die praktische Anwendung ausgearb. v. R. Rothmayer. Bb.	63—64
Blume, H. Über die Analyse kurzer Kurvenzüge. H.	346—358
Buchholz, H. Die konfluente hypergeometrische Funktion mit besonderer Berücksichtigung ihrer Bedeutung für die Integration der Wellengleichung in den Koordinaten eines Rotationsparaboloides. Z. B. 47—58,	101—118
Bückner, H. Eine vom Vorhaltschießen abgeleitete Interpretation einer Näherungslösung der gewöhnlichen linearen Differentialgleichung I. Ordnung. Kl. M.	122—123
Busemann, A. R. Sauer, Theoretische Einführung in die Gasdynamik. Bb.	299
Collatz, L. Graphische Lösung von Randwertproblemen bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung. Kl. M.	237—239
Cremer, L. Bemerkung zur Ausbreitung von „Biegewellen" in Stäben und Platten. Kl. M.	291—294
Deuker, E.-A. Zur Stabilität der elastischen Schalen I. H.	81—100
— desgl. II. H.	169—179
Dumitrescu, D. T. Strömung an einer Luftblase im senkrechten Rohr. H.	139—149
Falkenhagen, H. L. Bergmann, Der Ultraschall und seine Anwendung in Wissenschaft und Technik. 3. Aufl. Bb.	302
Federhofer, K. Berechnung der Auslenkung und Spannungen beim Kippen des geschlossenen Kreisringes. H.	35—47
Finsterwalder, K. Schwidefsky, Einführung in die Luft- und Erdbildmessung. 3. Aufl. Bb.	240
Flocke, K. A. R. Franke, Vom Aufbau der Getriebe, 1. Bd.: Die Entwicklungslehre der Getriebe. Bb.	300
Geppert, M.-P. Mathematische Theorie der Zeit/Menge-Beziehungen bestimmter Vergiftungsvorgänge. H.	269—278
Glaser, R. Über die Berechnung der Koeffizienten einer in der instationären Tragflügeltheorie auftretenden unendlichen Matrix. H.	279—289
Görtler, H. Über eine Schwingungserscheinung in Flüssigkeiten mit stabiler Dichteschichtung. H.	65—71
— Ergänzende Bemerkung zu der Arbeit von D. Küchemann: „Störungsbewegungen in einer Gasströmung mit Grenzschicht." Kl. M.	179—183
Görtler, H. Bemerkung zu H. Görtler, Berechnung von Aufgaben der freien Turbulenz auf Grund eines neuen Näherungsansatzes. (Berichtigung.) Z.	184
Graf, U. Affine Transformationen durch Doppel-Photographie. H.	230—236
Hadwiger, H. Über Massenpunktverteilungen konstanter Trägheit auf der Kugel. Kl. M.	61—62
Hamel, David Hilbert †. N.	128
Hantzsche, W. Die Prandtl-Glauertsche Näherung als Grundlage für ein Iterationsverfahren zur Berechnung kompressibler Unterschallströmungen. H.	185—199
Heiseler, A. Der Näherungswert $\pi = \frac{1}{3}(\sqrt{141} - \sqrt{6})$. Kl. M.	62—63
Heybey, W., L. Schwarz u. K. Wieghardt, Ergänzungen zu: Kamke, Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen. Kl. M.	123—125
Hund, F. A. Sommerfeld, Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. 1: Mechanik. Bb.	302
— G. Wentzel, Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder. Bb.	302
Karl, H. Biegung gekrümmter, dünnwandiger Rohre. H.	331—345
Klotter, K. u. G. Kotowski, Über die Stabilität der Lösungen Hillscher Differentialgleichungen mit drei unabhängigen Parametern. Erste Mitteilung: Über die Gleichung $y'' + (\lambda + \gamma_1 \cos x + \gamma_2 \cos 2x)\, y = 0$. H.	149—155
Kotowski, G. s. a. K. Klotter	149—155
— Lösungen der inhomogenen Mathieuschen Differentialgleichung mit periodischer Störfunktion beliebiger Frequenz (mit besonderer Berücksichtigung der Resonanzlösungen). H.	213—229
Krahn, E. Die Janzen-Rayleighsche zweite Näherung der kompressiblen Strömung um ein beliebiges Profil. H.	33—35
Lammel, E. Reibungslose Strömung im Außengebiet eines Kreises und zweier Kreise. Kl. M.	289—291
Lösch, F. Zum 60. Geburtstag von F. Pfeiffer. N.	64
Ludwig, K. Wärmeausgleichsvorgänge in bestrahlten Platten. H.	259—269
— Das Aufheizen einer Wand durch konstante Wärmestromdichten. Kl. M.	358—360
Lyra, G. Theorie der stationären Leewellenströmung in freier Atmosphäre. H.	1—28
Mangler, W. E. Eckert, Die Berechnung des Wärmeübergangs in der laminaren Grenzschicht umströmter Körper. Bb.	183

Seite

Mangler, W. Die „ähnlichen" Lösungen der Prandtlschen Grenzschichtgleichungen. H. . . . . 241—251

Mosch, E. K. Üller, Idee und Begriff der Welle, ein Leitfaden durch die physikalische Grundlagen-Forschung des Verfassers. Bb. . . . . 125—126

— H. Dörrie, Grundriß der Physik, mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. 2. Aufl. Bb. 126

Müller, H. P. Werkmeister, Vermessungskunde III, Trigonometrische und barometrische Höhenmessung, Tachymetrie und Topographie. 4. Aufl. Bb. 240

Müller, W. Über die Berechnung der Kräfte an einem in der reibungslosen Flüssigkeit beschleunigt bewegten Tragflügel. H. . . . . 305—320

Neuber, H. Die Grundgleichungen der elastischen Stabilität in allgemeinen Koordinaten und ihre Integration. H. 321—330

Peppler, G. Niemann, Schneckentriebe mit flüssiger Reibung, Abhängigkeit der übertragbaren Leistung und des Reibwertes von Zahnform, Abmessung, Drehzahl und Schmierzähigkeit, mit einem Anhang mathematischer Ableitungen von C. Weber. Bb. . . . . 300—301

Pöschl, Th. E. Pawelka, Übungen aus der Mechanik. Bb. 125

— F. Chmelka u. E. Melan, Einführung in die Statik. Bb. 301

Rellich, B. Baule, Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs, Bd. I, Differential- und Integralrechnung. Bb. 126

— O. Bolza, Aus meinem Leben. Bb. . . 127

— G. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der Fredholmschen Determinanten. 3. Aufl. Bb. 240

Reutter, F. Der starre Kreiszylinder im isotropen elastischen Medium. H. 156—169

Rothstein, W. Strömungen über Bodenerhebungen auf der rotierenden Erde. H. . . . . 72—80

Sauer, R. Charakteristikenverfahren für Kugel- und Zylinderwellen reibungsloser Gase. H. . . . . 29—32

Scheidig, B. Tiedemann, Über Bodenuntersuchungen bei Entwurf und Ausführung von Ingenieurbauten. 2. Aufl. Bb. 125

Schiel, F. Der durch Kapillarwirkung bedingte Zusammenhalt zweier benetzter Körper. H. . . . . 200—209

Schläfer, R. s. F. Stäblein . . . . . 59—61

Schminke, H. Nachtrag zu der Kleinen Mitteilung: „Eine Schieberanordnung für die Schlüsselgleichung $f_1(\varphi(\alpha)+\psi(\beta))+f_2(\gamma)=f_3(\alpha,\beta,\gamma)$, wobei nur das Endresultat abzulesen ist." Z. 184

Schubert, F. Zur Theorie des stationären Verdichtungsstoßes. H. . . . 129—138

Schulz, G. Zur Näherungskonstruktion der logarithmischen Spirale. Z. 184

Schwarz, L. s. W. Heybey . . . . . 123—125

Sörensen, E. K. Trutnovsky, Berührungsfreie Dichtungen. Bb. 299

Seite

Stäblein, F. u. R. Schläfer, Numerische Berechnung von

$$y(x)=e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt.$$ Kl. M. . . . . 59—61

Stohler, K. Eine Vereinfachung bei der numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Kl. M. 120—122

Strscheletzky, M. Annähernde Lösung des Integrals

$$J_m(z)=\frac{1}{\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{iz\cos\omega}\cdot e^{im\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)}\,d\omega.$$

Kl. M. . . . . 295—296

Stuart, H. Greinacher, Ergänzungen zur Experimentalphysik, einführende exakte Behandlung physikalischer Aufgaben, Fragen und Probleme. Bb. 301—302

Stüper, J. W. Müller, Einführung in die Mechanik des Fluges. 2. Aufl. Bb. 125

— Berichte der Luftfahrtabteilung der Technischen Hochschule Carolo Wilhelmina Braunschweig, herausgegeben von der Abteilung für Luftfahrt. Bb. 300

Tollmien, W. M. Sédille, Précis de mécanique des fluides à l'usage des ingénieurs. Bb. 63

— H. Reichardt, Gesetzmäßigkeiten der freien Turbulenz. Bb. 63

Wagner, K. W. F. Klinger, Einführung in die n-dimensionale algebraische Geometrie, mit besonderer Berücksichtigung der Physik für Techniker und Physiker. Bb. . . . . 126—127

Werkmeister, P. Zur Ausgleichung des mehrfachen Vorwärtseinschneidens. Kl. M. . . . . 118—120

— Die Tätigkeit der Baltischen Geodätischen Kommission in den Jahren 1938—1941. Bb. 183

— Bestimmung der Koordinaten der Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kreis. Kl. M. . . . . 296—299

Wieghardt, K. s. W. Heybey . . . 123—125

Willers, Fr. A. F. Sauter, Differentialgleichungen der Physik. Bb. . . . 126

— B. Baule, Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs, Bd. II, Ausgleichs- und Näherungsrechnung. Bb. 126

— Rühlmann-Schmiedel, Vierstellige Logarithmen- und Zahlentafel. 17. Aufl. Bb. 127

— H. v. Sanden, Praxis der Differentialgleichungen, eine Einführung. Bb. 239—240

— Die Stabilität von Kreisringplatten. H. 252—258

— F. Tölke, Praktische Funktionenlehre, Bd. I, Elementare und elementare transzendente Funktionen (Unterstufe). Bb. . . . . 302—304

— S. Koller, Graphische Tafeln zur Beurteilung statistischer Zahlen. 2. Aufl. Bb. 304

— Kriegstagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1943. N. 304

Wunderlich, W. Zur Triebstockverzahnung. H. . . . . 209—212

B. Sachverzeichnis

(Abkürzungen s. S. II; die nur mit Titel angezeigten Bücher sind hier nicht aufgeführt.)

Seite

Aeromechanik und Flugtechnik

Busemann, A. R. Sauer, Theoretische Einführung in die Gasdynamik. Bb. 299

Glaser, R. Über die Berechnung der Koeffizienten einer in der instationären Tragflügeltheorie auftretenden unendlichen Matrix. H. . . . . 279—289

Görtler, H. Ergänzende Bemerkung zu der Arbeit von D. Küchemann: „Störungsbewegungen in einer Gasströmung mit Grenzschicht." Kl. M. 179—183

Hantzsche, W. Die Prandtl-Glauertsche Näherung als Grundlage für ein Iterationsverfahren zur Berechnung kompressibler Unterschallströmungen. H. . . . . 185—199

Krahn, E. Die Janzen-Rayleighsche zweite Näherung der kompressiblen Strömung um ein beliebiges Profil. H. 33—35

Lyra, G. Theorie der stationären Leewellenströmung in freier Atmosphäre. H. . . . . 1—28

Mangler, W. E. Eckert, Die Berechnung des Wärmeübergangs in der laminaren Grenzschicht umströmter Körper. Bb. 183

— Die „ähnlichen" Lösungen der Prandtlschen Grenzschichtgleichungen. H. . . . . 241—251

Müller, W. Über die Berechnung der Kräfte an einem in der reibungslosen Flüssigkeit beschleunigt bewegten Tragflügel. H. . . . . 305—320

Rothstein, W. Strömungen über Bodenerhebungen auf der rotierenden Erde. H. . . . . 72—80

Sauer, R. Charakteristikenverfahren für Kugel- und Zylinderwellen reibungsloser Gase. H. . . . . 29—32

Schubert, F. Zur Theorie des stationären Verdichtungsstoßes. H. . . . 129—138

Stüper, J. W. Müller, Einführung in die Mechanik des Fluges. 2. Aufl. Bb. 125

— Berichte der Luftfahrtabteilung der Technischen Hochschule Carolo Wilhelmina Braunschweig, herausgegeben von der Abteilung für Luftfahrt. Bb. 300

Praktische Analysis

Blume, H. Über die Analyse kurzer Kurvenzüge. H. . . . . 346—358

Bückner, H. Eine vom Vorhaltschießen abgeleitete Interpretation einer Näherungslösung der gewöhnlichen linearen Differentialgleichung I. Ordnung. Kl. M. . . . . 122—123

Collatz, L. Graphische Lösung von Randwertproblemen bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung. Kl. M. . . . . 237—239

Heiseler, A. Der Näherungswert $\pi = \frac{1}{3}(\sqrt{141} - \sqrt{6})$. Kl. M. . . . 62—63

Schminke, H. Nachtrag zu der Kleinen Mitteilung: „Eine Schieberanordnung für die Schlüsselgleichung $f_1(\varphi(\alpha) + \psi(\beta)) + f_2(\gamma) = f_3(\alpha, \beta, \gamma)$, wobei nur das Endresultat abzulesen ist." Z. 184

Schulz, G. Zur Näherungskonstruktion der logarithmischen Spirale. Z. 184

Seite

Stohler, K. Eine Vereinfachung bei der numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Kl. M. 120—122

Strscheletzky, M. Annähernde Lösung des Integrals

$$J_m(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{iz\cos\omega} \cdot e^{im\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)} \cdot d\omega.$$

Kl. M. . . . . 295—296

Willers, H. v. Sanden, Praxis der Differentialgleichungen, eine Einführung. Bb. . . . . 239—240

Ballistik

Bückner, H. Eine vom Vorhaltschießen abgeleitete Interpretation einer Näherungslösung der gewöhnlichen linearen Differentialgleichung I. Ordnung. Kl. M. . . . . 122—123

Baumechanik

Beyer, K. E. Melan u. R. Schindler, Die genaue Berechnung von Trägerrosten, mit 39 Taf. für die praktische Anwendung ausgearb. v. R. Rothmayer. Bb. . . . . 63—64

Scheidig, B. Tiedemann, Über Bodenuntersuchungen bei Entwurf und Ausführung von Ingenieurbauten. 2. Aufl. Bb. 125

Bodenmechanik

Scheidig, B. Tiedemann, Über Bodenuntersuchungen bei Entwurf und Ausführung von Ingenieurbauten. 2. Aufl. Bb. 125

Schiel, F. Der durch Kapillarwirkung bedingte Zusammenhalt zweier benetzter Körper. H. . . . . 200—209

Elastizität und Plastizität

Cremer, L. Bemerkung zur Ausbreitung von „Biegewellen" in Stäben und Platten. Kl. M. . . . . 291—294

Deuker, E.-A. Zur Stabilität der elastischen Schalen I. H. . . . . 81—100

— desgl. II. H. . . . . 169—179

Federhofer, K. Berechnung der Auslenkung und Spannungen beim Kippen des geschlossenen Kreisringes. H. . . 35—47

Karl, H. Biegung gekrümmter, dünnwandiger Rohre. H. . . . . 331—345

Neuber, H. Die Grundgleichungen der elastischen Stabilität in allgemeinen Koordinaten und ihre Integration. H. . . . . 321—330

Reutter, F. Der starre Kreiszylinder im isotropen elastischen Medium. H. 156—169

Willers, Fr. A. Die Stabilität von Kreisringplatten. H. . . . . 252—258

Funktionentafeln

Buchholz, H. Die konfluente hypergeometrische Funktion mit besonderer Berücksichtigung ihrer Bedeutung für die Integration der Wellengleichung in den Koordinaten eines Rotationsparaboloides. Z. B. . . 47—58, 101—118

Seite

Stäblein, F. u. R. Schläfer, Numerische Berechnung von $y(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\,dt$. Kl. M. . . . . 59—61

Willers, F. Tölke, Praktische Funktionenlehre, Bd. I, Elementare und elementare transzendente Funktionen (Unterstufe). Bb. . . . . 302—304

Geometrie

Graf, U. Affine Transformationen durch Doppel-Photographie. H. . . . . 230—236

Wagner, K. W. F. Klinger, Einführung in die n-dimensionale algebraische Geometrie, mit besonderer Berücksichtigung der Physik für Techniker und Physiker. Bb. . . . . 126—127

Geophysik und Meteorologie

Lyra, G. Theorie der stationären Leewellenströmung in freier Atmosphäre. H. . . . . 1—28

Rothstein, W. Strömungen über Bodenerhebungen auf der rotierenden Erde. H. . . . . 72—80

Hydraulik und Hydromechanik

Dumitrescu, D. T. Strömung an einer Luftblase im senkrechten Rohr. H. . . . . 139—149

Görtler, H. Über eine Schwingungserscheinung in Flüssigkeiten mit stabiler Dichteschichtung. H. . . . . 65—71

Lammel, E. Reibungslose Strömung im Außengebiet eines Kreises und zweier Kreise. Kl. M. . . . . 289—291

Peppler, G. Niemann, Schneckentriebe mit flüssiger Reibung, Abhängigkeit der übertragbaren Leistung und des Reibwertes von Zahnform, Abmessung, Drehzahl und Schmierzähigkeit, mit einem Anhang mathematischer Ableitungen von C. Weber. Bb. . . . . 300—301

Schiel, F. Der durch Kapillarwirkung bedingte Zusammenhalt zweier benetzter Körper. H. . . . . 200—209

Sörensen, E. K. Trutnovsky, Berührungsfreie Dichtungen. Bb. 299

Tollmien, W. M. Sédille, Précis de mécanique des fluides à l'usage des ingénieurs. Bb. 63

Kinematik

Flocke, K. A. R. Franke, Vom Aufbau der Getriebe, 1. Bd.: Die Entwicklungslehre der Getriebe. Bb. 300

Wunderlich, W. Zur Triebstockverzahnung. H. . . . . 209—212

Mathematik im allgemeinen

Buchholz, H. Die konfluente hypergeometrische Funktion mit besonderer Berücksichtigung ihrer Bedeutung für die Integration der Wellengleichung in den Koordinaten eines Rotationsparaboloides. Z. B. . . . . 47—58, 101—118

Heybey, W., L. Schwarz u. K. Wieghardt, Ergänzungen zu: Kamke, Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen. Kl. M. 123—125

Klotter, K. u. G. Kotowski, Über die Stabilität der Lösungen Hillscher Differentialgleichungen mit drei unabhängigen Parametern. Erste Mitteilung: Über die Gleichung $y'' + (\lambda + \gamma_1 \cos x + \gamma_2 \cos 2x)\, y = 0$. H. . 149—155

Kotowski, G. Lösungen der inhomogenen Mathieuschen Differentialgleichung mit periodischer Störfunktion beliebiger Frequenz (mit besonderer Berücksichtigung der Resonanzlösungen). H. . . . . 213—229

Rellich, B. Baule, Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs, Bd. I, Differential- und Integralrechnung. Bb. 126

— G. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der Fredholmschen Determinanten. 3. Aufl. Bb. 240

Willers, Fr. A. F. Sauter, Differentialgleichungen der Physik. Bb. . . . 126

— B. Baule, Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs, Bd. II, Ausgleichs- und Näherungsrechnung. Bb. 126

— Rühlmann-Schmiedel, Vierstellige Logarithmen- und Zahlentafel. 17. Aufl. Bb. 127

F. Tölke, Praktische Funktionenlehre, Bd. I, Elementare und elementare transzendente Funktionen (Unterstufe). Bb. . . . . 302—304

Mechanik im allgemeinen

Hadwiger, H. Über Massenpunktverteilungen konstanter Trägheit auf der Kugel. Kl. M. . . . . 61—62

Hund, F. A. Sommerfeld, Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. 1: Mechanik. Bb. 302

Pöschl, Th, E. Pawelka, Übungen aus der Mechanik. Bb. 125

Nomographie

Schminke, H. Nachtrag zu der Kleinen Mitteilung: „Eine Schieberanordnung für die Schlüsselgleichung $f_1(\varphi(\alpha) + \psi(\beta)) + f_2(\gamma) = f_3(\alpha, \beta, \gamma)$, wobei nur das Endresultat abzulesen ist." Z. 184

Willers, S. Koller, Graphische Tafeln zur Beurteilung statistischer Zahlen. 2. Aufl. Bb. 304

Numerisches Rechnen

Glaser, R. Über die Berechnung der Koeffizienten einer in der instationären Tragflügeltheorie auftretenden unendlichen Matrix. H. . . . . 279—289

Stäblein, F. u. R. Schläfer, Numerische Berechnung von $y(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\,dt$. Kl. M. . . . . 59—61

Persönliches

Hamel, David Hilbert †. N. 128

Lösch, F. Zum 60. Geburtstag von F. Pfeiffer. N. 64

Rellich, O. Bolza, Aus meinem Leben. Bb. 127

K. Mack †, A. Galle †, E. Salkowski †, F. Emde. N. 240

E. Mohr. N. 304

Seite

Physik im allgemeinen

Falkenhagen, H. L. Bergmann, Der Ultraschall und seine Anwendung in Wissenschaft und Technik. 3. Aufl. Bb. 302
Hund, F. A. Sommerfeld, Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. 1: Mechanik. Bb. 302
— G. Wentzel, Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder. Bb. 302
Mosch, E. K. Uller, Idee und Begriff der Welle, ein Leitfaden durch die physikalische Grundlagen-Forschung des Verfassers. Bb. . . . . 125—126
→ H. Dörrie, Grundriß der Physik, mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. 2. Aufl. Bb. 126
Stuart, H. Greinacher, Ergänzungen zur Experimentalphysik, einführende exakte Behandlung physikalischer Aufgaben, Fragen und Probleme. Bb. 301—302
Wagner, K. W. F. Klinger, Einführung in die n-dimensionale algebraische Geometrie, mit besonderer Berücksichtigung der Physik für Techniker und Physiker. Bb. . . . 126—127
Willers, Fr. A. F. Sauter, Differentialgleichungen der Physik. Bb. . . . 126

Schwingungen

Görtler, H. Über eine Schwingungserscheinung in Flüssigkeiten mit stabiler Dichteschichtung. H. . . . . 65—71

Statik

Pöschl, Th. F. Chmelka u. E. Melan, Einführung in die Statik. Bb. 301

Turbulente Strömung

Görtler, H. Bemerkung zu H. Görtler, Berechnung von Aufgaben der freien Turbulenz auf Grund eines neuen Näherungsansatzes. (Berichtigung.) Z. 184
Tollmien, W. H. Reichardt, Gesetzmäßigkeiten der freien Turbulenz. Bb. 63

Seite

Vermessungskunde und Photogrammetrie

Finsterwalder, K. Schwidefsky, Einführung in die Luft- und Erdbildmessung. 3. Aufl. Bb. 240
Graf, U. Affine Transformationen durch Doppel-Photographie. H. . . . 230—236
Müller, H. P. Werkmeister, Vermessungskunde III, Trigonometrische und barometrische Höhenmessung, Tachymetrie und Topographie. 4. Aufl. Bb. 240
Werkmeister, P. Zur Ausgleichung des mehrfachen Vorwärtseinschneidens. Kl. M. . . . . 118—120
— Die Tätigkeit der Baltischen Geodätischen Kommission in den Jahren 1938—1941. Bb. 183
— Bestimmung der Koordinaten der Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kreis. Kl. M. . . . . 296—299

Vorträge, Versammlungen, Feiern

Willers, Kriegstagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1943. N. . 304

Wärmelehre

Ludwig, K. Wärmeausgleichsvorgänge in bestrahlten Platten. H. . . . 259—269
— Das Aufheizen einer Wand durch konstante Wärmestromdichten. Kl. M. . 358—360
Mangler, W. E. Eckert, Die Berechnung des Wärmeübergangs in der laminaren Grenzschicht umströmter Körper. Bb. 183

Wahrscheinlichkeitslehre und Statistik

Geppert, M.-P. Mathematische Theorie der Zeit/Menge-Beziehungen bestimmter Vergiftungsvorgänge. H. . . 269—278
Willers, S. Koller, Graphische Tafeln zur Beurteilung statistischer Zahlen. 2. Aufl. Bb. 304

C. Buchbesprechungen

(Bb. = Buchbesprechung bzw. Titelanführung des Buches. Der Name des Referenten ist in Klammern beigefügt.)

Seite

Abhandlungen (Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau). Inhalts- und Autorenverzeichnisse der Bände 1—6, 1932—1941. Bb. 304
Baule, B. Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs, Bd. I, Differential- und Integralrechnung. Bb. (Rellich) 64, 126
— desgl. Bd. II, Ausgleichs- und Näherungsrechnung. Bb. (Willers) 126
Bergmann, L. Der Ultraschall und seine Anwendung in Wissenschaft und Technik. 3. Aufl. Bb. (Falkenhagen) 302
Berichte der Luftfahrtabteilung der Technischen Hochschule Carolo Wilhelmina Braunschweig, herausgegeb. von der Abteilung für Luftfahrt. Bb. (Stüper) 300

Seite

Bolza, O. Aus meinem Leben. Bb. (Rellich) 127
Chmelka, F. u. E. Melan, Einführung in die Statik. Bb. (Pöschl) 127, 301
Die Tätigkeit der Baltischen Geodätischen Kommission in den Jahren 1938—1941. Bb. (Werkmeister) 127, 183
Dörrie, H. Grundriß der Physik, mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. 2. Aufl. Bb. (Mosch) . . . 126
Eckert, E. Die Berechnung des Wärmeübergangs in der laminaren Grenzschicht umströmter Körper. Bb. (Mangler) 183
Föppl, A. Vorlesungen über technische Mechanik. 6. Bd.: Die wichtigsten Lehren der höheren Dynamik. 5. Aufl. Bb. 304

	Seite
Franke, R. Vom Aufbau der Getriebe, 1. Bd.: Die Entwicklungslehre der Getriebe. Bb. (Flocke)	300
Gey, K. u. H. Teichmann, Einführung in die Lehre vom Schuß (Ballistik). 5. Aufl. Bb.	304
Greinacher, H. Ergänzungen zur Experimentalphysik, einführende exakte Behandlung physikalischer Aufgaben, Fragen und Probleme. Bb. (Stuart)	301—302
Hößjer, G. Über die konforme Abbildung eines veränderlichen Bereiches. Bb.	127
Klinger, F. Einführung in die n-dimensionale algebraische Geometrie, mit besonderer Berücksichtigung der Physik für Techniker und Physiker. Bb. (Wagner)	126—127
Knopp, K. Aufgabensammlung zur Funktionentheorie, II. Teil, Aufgaben zur höheren Funktionentheorie. 2. Aufl. Bb.	304
Koller, S. Graphische Tafeln zur Beurteilung statistischer Zahlen. 2. Aufl. Bb. (Willers)	304
Kowalewski, G. Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der Fredholmschen Determinanten. 3. Aufl. Bb. (Rellich)	127, 240
Krischer, O. Der Wärme- und Stoffaustausch im Trocknungsgut, die analytische und graphische Behandlung der Trocknung poriger hygroskopischer Güter. Bb.	64
Melan, E. s. a. F. Chmelka	127, 301
— u. R. Schindler, Die genaue Berechnung von Trägerrosten, mit 39 Taf. für die praktische Anwendung ausgearb. v. R. Rothmayer. Bb. (Beyer)	63—64
Müller, W. Einführung in die Mechanik des Fluges. 2. Aufl. Bb. (Stüper)	64, 125
Niemann, G. Schneckentriebe mit flüssiger Reibung, Abhängigkeit der übertragbaren Leistung und des Reibwertes von Zahnform, Abmessung, Drehzahl und Schmierzähigkeit, mit einem Anhang mathematischer Ableitungen von C. Weber. Bb. (Peppler)	300—301
Pawelka, E. Übungen aus der Mechanik. Bb. (Pöschl)	64, 125
Pfriem, H. Nichtstationäre Wärmeübertragung in Gasen, insbesondere in Kolbenmaschinen. Bb.	64
Prandtl, L. Führer durch die Strömungslehre, zugleich 3. Aufl. des Abrisses der Strömungslehre. Bb.	304
Raethjen, P. Einführung in die Physik der Atmosphäre, Bd. II, Meteorologische Aerodynamik. Bb.	240
Rausch, E. Maschinenfundamente und andere dynamische Bauaufgaben, 3. Teil, Rahmenfundamente bei hoher Maschinendrehzahl (insbesondere Dampfturbinenfundamente), Aufstellung von Maschinen in Gebäuden, Werkzeugmaschinen, Schäden an Maschinenfundamenten und Erschütterungsschäden anderer Art, andere dynamische Aufgaben im Bauwesen nebst Ergänzung zum 1. und 2. Teil des Buches. Bb.	127
Reichardt, H. Gesetzmäßigkeiten der freien Turbulenz. Bb. (Tollmien)	63
Rothmayer, R. s. E. Melan	63—64
Rühlmann-Schmiedel, Vierstellige Logarithmen- und Zahlentafel. 17. Aufl. Bb. (Willers)	127
v. Sanden, H. Praxis der Differentialgleichungen, eine Einführung. Bb. (Willers)	239—240
Sauer, R. Theoretische Einführung in die Gasdynamik. Bb. (Busemann)	240, 299
Sauter, F. Differentialgleichungen der Physik. Bb. (Willers)	126
Schindler, R. s. E. Melan	63—64
Schmiedel s. Rühlmann	127
Schwidefsky, K. Einführung in die Luft- und Erdbildmessung. 3. Aufl. Bb. (Finsterwalder)	183, 240
Sédille, M. Précis de mécanique des fluides à l'usage des ingénieurs. Bb. (Tollmien)	63
Sommerfeld, A. Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. 1: Mechanik. Bb. (Hund)	302
Teichmann, H. s. K. Gey	304
Tiedemann, B. Über Bodenuntersuchungen bei Entwurf und Ausführung von Ingenieurbauten. 2. Aufl. Bb. (Scheidig)	125
Timpe, A. Höhere Mathematik I, II. Autographierte Vorlesungen. Bb.	240
Tölke, F. Praktische Funktionenlehre, Bd. I, Elementare und elementare transzendente Funktionen (Unterstufe). Bb. (Willers)	302—304
Trutnovsky, K. Berührungsfreie Dichtungen. Bb. (Sörensen)	299
Uller, K. Idee und Begriff der Welle, ein Leitfaden durch die physikalische Grundlagen-Forschung des Verfassers. Bb. (Mosch)	125—126
Weber, C. s. G. Niemann	300—301
Wentzel, G. Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder. Bb. (Hund)	240, 302
Werkmeister, P. Vermessungskunde II, Messung von Horizontalwinkeln, Festlegung von Punkten im Koordinatensystem, Absteckungen. Bb.	127
— Vermessungskunde III, Trigonometrische und barometrische Höhenmessung, Tachymetrie und Topographie. 4. Aufl. Bb. (Müller)	240
Wirz, W. Die Querruderwirkung bei hoher Fluggeschwindigkeit. Bb.	64
Witting, A. Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung. Bb.	64

propaganda purposes or in the popular press. Quotation of titles and abstracts in publications of purely technical or scientific nature is not prohibited.

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 23 | **Februar 1943** | **Heft 1**

Inhalt:

	Seite
Hauptaufsätze. G. Lyra: Theorie der stationären Leewellenströmung in freier Atmosphäre	1
R. Sauer: Charakteristikenverfahren für Kugel- und Zylinderwellen reibungsloser Gase	29
E. Krahn: Die Janzen-Rayleighsche zweite Näherung der kompressiblen Strömung um ein beliebiges Profil	33
K. Federhofer: Berechnung der Auslenkung und Spannungen beim Kippen des geschlossenen Kreisringes	35
Zusammenfassender Bericht. H. Buchholz: Die konfluente hypergeometrische Funktion mit besonderer Berücksichtigung ihrer Bedeutung für die Integration der Wellengleichung in den Koordinaten eines Rotationsparaboloides (I. Teil)	47
Kleine Mitteilungen. F. Stäblein und R. Schläfer: Numerische Berechnung von $y(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt$	59
H. Hadwiger: Über Massenpunktverteilungen konstanter Trägheit auf der Kugel	61
A. Heiseler: Der Näherungswert $\pi = \frac{1}{3}(\sqrt{141} - \sqrt{6})$	62
Buchbesprechungen. Sédille: Précis de mécanique des fluides à l'usage des ingénieurs. — Reichardt: Gesetzmäßigkeiten der freien Turbulenz. — Melan und Schindler: Die genaue Berechnung von Trägerrosten. — Weiter eingegangene Bücher	63
Nachrichten	64

HAUPTAUFSÄTZE

Theorie der stationären Leewellenströmung in freier Atmosphäre*).

Von *G. Lyra* in Göttingen.

(Aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung.)

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Herleitung der auf der Leeseite von quer überströmten Höhenzügen beobachteten stationären Wellenströmung einer stabil geschichteten Atmosphäre aus den Grundgleichungen der Mechanik. Das Problem läßt sich auf die erste Randwertaufgabe der Wellengleichung für die Halbebene zurückführen. Die eindeutige Bestimmung der durch die Natur realisierten Lösung dieser an sich unbestimmten Randwertaufgabe bildet den Gegenstand der mathematischen Untersuchung des zweiten Teils, wo drei verschiedene Methoden zur Lösung des Eindeutigkeitsproblems dargelegt werden. Die vollständige Lösung der Aufgabe wird im dritten Teil auf Profile spezieller Bodenformen angewandt und mit den bisher vorliegenden Beobachtungen verglichen.

Einleitung.

Während der letzten Jahre hat L. Prandtl verschiedene Probleme der Mechanik der freien Atmosphäre mit der sonst in der angewandten Mechanik üblichen Strenge der Methode von neuem in Angriff genommen und einige Ergebnisse in der Neuauflage seines „Abriß der Strömungslehre“ mitgeteilt. Aus der Prandtlschen Schule ist auch die vorliegende Untersuchung hervorgegangen. Sie hat jene stationäre, wellenförmige Strömung der freien Atmosphäre zum Gegenstand, die sich auf der Leeseite von quer überströmten Höhenzügen, Plateauhängen und anderen langgestreckten Bodenerhebungen ausbildet (vgl. Bild 1). Indem „Wellenberge“ dieser leeseitigen Wellen über die Kondensationshöhe hinausragen, wird in Lee des Gebirgshindernisses diese stationäre Luftströmung als stehende „Moazagotl-Wolke“ in Form einer oder mehrerer zum Gebirgskamm paralleler Wolkenbänke sichtbar, welche fortwährend am Luvrand ihrer Unterseite entstehen und am Leerand ihrer Unterseite vergehen. Grunauer Segelflieger haben 1933 die in Lee des Riesengebirges über dem Hirschberger Tal auftretende Wellenströmung der Atmosphäre als neue Segelflugmöglichkeit entdeckt und 1938 im „Moazagotl-Aufwind“ dieser Strömung mit dem Segelflugzeug Höhen bis zu 8600 m über Meer erreicht[1]).

*) Erweiterte Wiedergabe eines Vortrages, gehalten auf der Tagung der Gesellschaft für angew. Math. u. Mech. in München am 13. Juni 1942.

[1]) Reiches Beobachtungsmaterial auf Grund segelfliegerischer Erfahrung und ausführlicher Literaturnachweis findet sich bei J. Küttner: Moazagotl und Föhnwelle. Beitrag z. Phys. d. fr. Atmosphäre, Bd. 25 (1939), S. 79 bis 114 u. S. 297.

Reproduced and Distributed in the Public Interest by THE ALIEN PROPERTY CUSTODIAN

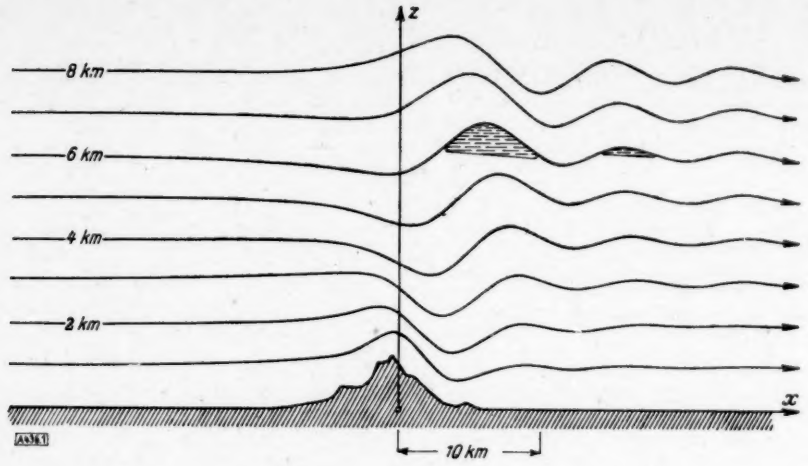


Bild 1.

Das Phänomen der Leewellen tritt bekanntlich auch schon an der freien Oberfläche eines Flüssigkeitsstromes unter dem Einfluß stationärer Störungen auf. Die Wellen, die in Lee eines auf die Oberfläche einer homogenen, inkompressiblen Strömung ausgeübten stationären Druckes oder — was auf dasselbe hinauskommt — hinter einer entlang der Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit gleichförmig fortschreitenden Druckstörung auftreten, sind zuerst von Lord Rayleigh[2]) 1883 für den Fall großer Tiefe theoretisch erklärt worden. Dieselbe Erscheinung bildet sich aus, wenn eine inkompressible und homogene schwere Flüssigkeit von endlicher Tiefe eine langgestreckte Bodenerhebung quer überströmt. Die Theorie dieser stationären Wellenströmung in Lee einer schmalen Unebenheit des Bodens hat Lord Kelvin[3]) 1886 in einer Reihe von Arbeiten entwickelt und damit u. a. eine 50 Jahre ältere praktische Beobachtung von Scott Russel[4]) erklärt. Noch auffallender ist eine ähnliche, in den norwegischen Fjorden bekannte Beobachtung, wonach Schiffe in der über dem Salzwasser lagernden seichten Süßwasserschicht bei langsamer Fahrt einen abnormen Widerstand erfahren, der von den einseitigen internen Grenzflächenwellen herrührt. Diese Erscheinung des „Totwassers" hat V. W. Ekman[5]) eingehend untersucht und H. Lamb[6]) durch seine theoretische Behandlung der Wellen in der Strömung zweier übereinander geschichteter, inkompressibler Flüssigkeiten verschiedener Dichte erklärt. Eine Untersuchung der Leewellenströmung in einem kompressiblen und kontinuierlich geschichteten Medium wurde zuerst 1940 vom Verfasser in den Beiträgen z. Phys. d. fr. Atmosphäre[7]) mitgeteilt. Doch ist daselbst nur eine erste Näherung für den Fall isothermer Atmosphäre enthalten und noch keine Lösung des Eindeutigkeitsproblems gelungen.

Schon in dem einfachsten Fall der reibungsfreien, inkompressiblen und homogenen schweren Flüssigkeit mit freier Oberfläche besteht für die mathematische Behandlung der Leewellenströmung die Schwierigkeit, daß für Anströmgeschwindigkeiten, welche kleiner als die Grundwellengeschwindigkeit sind, das Problem unbestimmt wird. Denn man kann jeder partikulären Lösung des Problems wegen der unbegrenzten Ausdehnung des Stromes einen Zug freier Wellen überlagern, deren Geschwindigkeit derjenigen des Stromes entgegengesetzt gleich ist. Rayleigh hat a. a. O. diese Schwierigkeit, aus der unendlichen Mannigfaltigkeit möglicher Lösungen die eine durch die Natur eindeutig bestimmte Lösung auszusondern, da-

[2]) Lord Rayleigh: The Form of Standing Waves on the Surface of Running Water. Proc. London Mathem. Soc. Bd. 15 (1883), S. 69 bis 78, oder in Papers Bd. 2, S. 258. Vgl. auch die Darstellung bei H. Lamb: Lehrbuch der Hydrodynamik, 2. Aufl., Leipzig 1931, S. 446 ff.

[3]) W. Thomson: On Stationary Waves in Flowing Water. Part III. Phil. Mag. (5) Bd. 22 (1886), S. 517 bis 530, oder in Papers, Bd. 4, S. 282. Vgl. auch die Darstellung bei Lamb: Lehrb. d. Hydr., 2. Aufl., Lpz. 1931, S. 459 ff.

[4]) Scott Russel: Experimental Researches into the Laws of certain Hydrodynamical Phenomena ... Trans. Roy. Soc. Edinburgh. Bd. 14 (1840), S. 79.

[5]) V. W. Ekman: On Dead-Water, Scientific Results of the Norwegian North Polar Expedition 1893 bis 1896, 15. Teil. Christiania 1904.

[6]) H. Lamb: On Waves due to a Travelling Disturbance, with an Application to Waves in Superposed Fluids. Phil. Mag. (6), Bd. 31 (1916), S. 386 bis 398.

[7]) G. Lyra: Über den Einfluß von Bodenerhebungen auf die Strömung einer stabil geschichteten Atmosphäre. Beitr. z. Phys. d. fr. Atmosphäre, Bd. 26 (1940), S. 197 bis 206.

durch behoben, daß er zunächst durch Einführung gewisser Reibungskräfte eine allgemeinere, aber eindeutig bestimmte Aufgabe gestellt hat, um dann in deren eindeutig vorhandenen Lösung mit dem Reibungskoeffizienten den Grenzübergang zu Null zu vollziehen. Im Gegensatz zu diesem Verfahren, das in einer „Limitierung" gewisser divergenter Integrale besteht, hat Kelvin die Eindeutigkeit einfach durch die physikalisch begründete Zusatzforderung hergestellt, daß in der wirklichen Lösung stromaufwärts in hinreichender Entfernung von der Störungsstelle alle Wellen gelöscht sind. Auch der wesentlich allgemeinere Fall eines reibungsfreien, kompressiblen und kontinuierlich geschichteten Mediums führt auf das Problem der Eindeutigkeit, das naturgemäß weniger elementare Hilfsmittel zu seiner Lösung erfordert. Das geht schon daraus hervor, daß die theoretische Behandlung der Wellen in zwei übereinander geschichteten inkompressiblen Flüssigkeiten verschiedener Dichte bei dem Grenzübergang zu verschwindendem Dichteunterschied versagt. Auch kann die Kompressibilität der aus transversalen Schwerewellen und longitudinalen Elastizitätswellen zusammengesetzten atmosphärischen Leewellen nicht mehr vernachlässigt werden, wenn man über eine mehr qualitative Betrachtung hinaus zu allgemeinen quantitativen Aussagen gelangen will.

Es geht also um eine befriedigende Erklärung der beobachteten Strömungserscheinung der freien Atmophäre, d. h. um eine strenge Herleitung der stationären Leewellenströmung in einem kompressiblen und kontinuierlich geschichteten Medium mit beliebig linearem Temperaturfeld aus den Grundgleichungen der Mechanik und Thermodynamik. Für den Fall der isothermen Atmosphäre wurde die strenge Lösung 1941 von H. Stümke (z. Z. im Felde) in einem noch unveröffentlichten Bericht aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung gegeben, wo die Eindeutigkeit des Problems durch das Rayleighsche Limitierungsverfahren erreicht wird. Abschnitt 7 enthält im wesentlichen die Darstellung der Stümkeschen Arbeit in Übertragung auf den Fall polytroper Schichtung. Für diesen allgemeinen Fall einer Atmosphäre mit beliebig linearem Temperaturfeld hat der Verfasser die Theorie der atmosphärischen Leewellen auf einem Wege entwickelt, welcher in gewissem Sinne als eine „Methode der unendlich vielen Variablen" bezeichnet werden kann. Diese Theorie ist in Abschnitt 6 dargestellt. Im 8. Abschnitt ist noch eine überaus kurze Herleitung der atmosphärischen Leewellen auf ganz anderem Wege gegeben. Schließlich wird im III. Teil die Theorie noch soweit ausgeführt, daß sie eine unmittelbare Anwendung auf praktische Aufgaben der Meteorologie gestattet. Mit der Beantwortung der Frage nach der Eindeutigkeit der Leewellenlösung und ihrer Erweiterung auf beliebig polytrope Schichtung ist die Theorie der atmosphärischen Leewellenströmung zu einem vorläufigen Abschluß gekommen[8]).

I. Zurückführung des Leewellenproblems auf eine Randwertaufgabe der Wellengleichung.

1. Die Zustandsänderungen in der Atmosphäre. Einem Prandtlschen Grundsatz entsprechend, soll die Aufgabe zunächst auf eine nur noch das Wesentliche des zu berechnenden Vorgangs enthaltende Form vereinfacht und das hierbei verbleibende Problem der reinen Mechanik streng formuliert und gelöst werden. Bei der atmosphärischen Leewellenströmung handelt es sich um ein vorwiegend zweidimensionales Problem der Hydrodynamik kompressibler und stabil geschichteter Medien, bei welchem Reibung, Erddrehung, Wärmekonvektion, Strahlung und Feuchtigkeit keine wesentliche Rolle spielen. Da ferner der Vorgang in erster Näherung als Störung einer konstanten horizontalen Gründströmung mit linearem Temperaturfeld aufgefaßt werden kann, so bleibt der Zusammenhang mit der Erfahrung gewahrt, wenn

[8]) In der meteorologischen Literatur liegen zahlreiche zum Teil sich widerstreitende Versuche zu einer Erklärung der atmosphärischen Leewellen vor. Doch besteht keiner dieser Versuche in einer einheitlichen Zurückführung des Gesamtbildes der Leewellen auf die Erhaltungssätze der Physik. Erwähnt sei z. B. die von J. Küttner a. a. O. gegebene Erklärung, welche von der Annahme ausgeht, daß sich die beobachtete Leewellenströmung nur bei Erreichung einer bestimmten kritischen Geschwindigkeit ausbildet. Da aber die kritische Wellengeschwindigkeit für kompressible und kontinuierlich geschichtete Medien auch schon bei geringer Stabilität weit oberhalb der praktisch in Betracht kommenden Windgeschwindigkeiten gelegen ist, nimmt Küttner eine interne Grenzfläche an, deren kritische Wellengeschwindigkeit bei geeigneter Annahme über Dicke der „Inversionsschicht" u. a. die gewünschte Größenordnung hat. Gegen die behauptete Notwendigkeit solcher Grenzflächen, die keineswegs aus dem aerologischen Material hervorgeht, spricht nicht nur die Tatsache, daß nach vorliegender Theorie die Leewellenströmung auch bei durchaus stetiger Temperaturschichtung aus den hydrodynamisch-thermodynamischen Grundgleichungen gefolgert werden kann. Nach Küttners Erklärung müßte schon eine geringe Überschreitung der kritischen Windgeschwindigkeit ein völliges Erlöschen der Leewellen zur Folge haben, was noch nie beobachtet wurde. Vielmehr treten Leewellen bei jeder Windstärke auf. Im übrigen beschränken sich Küttners Beobachtungen nur auf die „Moazagotl-Wetterlage", d. h. einseitig auf diejenigen Fälle von Leewellenströmung, welche von der Erscheinung der Leewellenwolke begleitet sind. Hierdurch entstand das Mißverständnis, wonach die Leewellenströmung eine typische Föhnerscheinung darstellen soll. Es sei noch auf eine dem Verf. erst nach Abschluß der vorliegenden Arbeit zur Kenntnis gekommene Untersuchung von P. Queney (Comptes rendus, Bd. 213 (1941), S. 588 bis 591) hingewiesen. Doch kann die a. a. O. Seite 590 ohne Beweis mitgeteilte Formel für die Aufwindverteilung nicht richtig sein, da die darin vorkommenden Koeffizienten statt $\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$ jedenfalls $-\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right)$ lauten müssen (vgl. die vorliegende Arbeit S. 23, Formel 4).

der Berechnung die atmosphärischen Störungsgleichungen für stationäre, reibungsfreie Strömung in polytroper Atmosphäre zugrunde gelegt werden.

Zur Beschreibung der Zustandsänderungen und Bewegungsvorgänge werde in einem Punkt der Erdoberfläche als Koordinatenanfang ein rechtwinkliges Koordinatensystem so gewählt, daß die z-Achse vertikal nach oben und die x-Achse in Richtung der Grundströmung weist, so daß sich das Bodenhindernis parallel zur y-Achse erstreckt. Dichte, Druck, absolute Temperatur und Geschwindigkeitskomponenten der zweidimensionalen gestörten Strömung seien beziehungsweise gleich $\bar{\varrho}+\varrho$, $\bar{p}+p$, $\bar{T}+T$ und $(\bar{u}+u, w)$, worin $\bar{\varrho}$, $\bar{p}$, $\bar{T}$ die entsprechenden bekannten, nur von z abhängigen Größen des Grundzustandes und $(\bar{u}, 0)$ die konstanten Geschwindigkeitskomponenten der Grundströmung bezeichnen. Diese ungestörte Luftströmung stellt wegen des räumlich und zeitlich konstanten Feldes horizontaler Geschwindigkeiten eine Atmosphäre in statischem Gleichgewicht dar. Wir setzen voraus, daß sie eine polytrope Atmosphäre sei, d. h. ein lineares Temperaturfeld

$$\bar{T}=\bar{T}_0-\gamma z \qquad (1)$$

habe, wobei $\bar{T}_0$ die absolute Temperatur am Boden $z=0$ und $\gamma=-\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}$ den konstanten Temperaturgradienten bezeichnet. Durch die lineare Temperaturabnahme mit der Höhe ist — von bodennahen Schichten abgesehen — die Troposphäre gekennzeichnet, deren Höhe in mittleren Breiten etwa 10 km und deren vertikaler Temperaturgradient im Mittel 0,6 ° C|100 m beträgt. Um neben der „geometrischen Zustandskurve“ (1) auch die räumliche Verteilung von Druck und Dichte zu kennen, integriert man die statische Grundgleichung

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}=g\bar{\varrho} \qquad (2)$$

vermittels (1) und der Gasgleichung $\frac{\bar{p}}{\bar{\varrho}}=R\bar{T}$. Man erhält dann unter Einführung der „Höhe der homogenen Atmosphäre“ $H=R\bar{T}_0/g=\bar{p}_0/g\bar{\varrho}_0$ und der Dimensionslosen $n=g/(g-R\gamma)$ für die Abhängigkeit der drei Zustandsgrößen von der Höhe

$$\left.\begin{aligned}\bar{\varrho}&=\bar{\varrho}_0\left(1-\frac{n-1}{n}\frac{z}{H}\right)^{\frac{1}{n-1}}\\ \bar{p}&=\bar{p}_0\left(1-\frac{n-1}{n}\frac{z}{H}\right)^{\frac{n}{n-1}}\\ \bar{T}&=\bar{T}_0\left(1-\frac{n-1}{n}\frac{z}{H}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (3),$$

worin die zweite Beziehung in der nach z aufgelösten Form die „polytrope Höhenformel“ darstellt. Danach bestehen für diese polytrope oder „nach der Polytropen der Klasse n aufgebaute“ Atmosphäre zwischen je zwei der drei Zustandsgrößen die geometrischen Zustandsgleichungen

$$\frac{\bar{p}}{\bar{p}_0}=\left(\frac{\bar{\varrho}}{\bar{\varrho}_0}\right)^n,\quad \frac{\bar{T}}{\bar{T}_0}=\left(\frac{\bar{p}}{\bar{p}_0}\right)^{\frac{n-1}{n}},\quad \frac{\bar{\varrho}}{\bar{\varrho}_0}=\left(\frac{\bar{T}}{\bar{T}_0}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Dem vertikalen Temperaturgradienten $\gamma=\frac{n-1}{n}\frac{g}{R}$ entspricht der Exponent $n=g/(g-R\gamma)$. Der Fall $n=\varkappa=c_p/c_v=1{,}4$ liefert die adiabatische Atmosphäre und die Grenzübergänge $n\to 1$ und $n\to\infty$ in bekannter Weise die isotherme bzw. die homogene (gleichförmige) Atmosphäre.

Wegen der schnellen Druckänderungen, welche die Luftmassen in der gestörten Strömung erfahren, setzen wir für die individuellen Zustandsänderungen eines Luftteilchens voraus, daß ihm von außen Wärme weder zugeführt noch entzogen werde. Diese adiabatische Zustandsänderung ist nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik durch die Differentialgleichung

$$c_v\frac{\mathrm{d}(\bar{T}+T)}{\mathrm{d}t}+A(\bar{p}+p)\frac{\mathrm{d}\frac{1}{\bar{\varrho}+\varrho}}{\mathrm{d}t}=0$$

gegeben, wo $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ die „individuelle“ oder „substantielle“ Differentiation nach der Zeit be-

zeichnet. Die Integration dieser Gleichung mit Hilfe der Gasgleichung $\frac{\bar{p}+p}{\bar{\varrho}+\varrho}=R(\bar{T}+T)$ liefert als „individuelle Zustandsgleichungen" zwischen je zwei Zustandsgrößen die drei Formen der Adiabate

$$\frac{\bar{p}+p}{\bar{p}_0+p_0}=\left(\frac{\bar{\varrho}+\varrho}{\bar{\varrho}_0+\varrho_0}\right)^{\varkappa},\quad \frac{\bar{T}+T}{\bar{T}_0+T_0}=\left(\frac{\bar{p}+p}{\bar{p}_0+p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}},\quad \frac{\bar{\varrho}+\varrho}{\bar{\varrho}_0+\varrho_0}=\left(\frac{\bar{T}+T}{\bar{T}_0+T_0}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}},$$

wobei die Gleichungen $\varkappa=c_p/c_v$ und $AR=c_p-c_v$ benutzt wurden. Während wir in den geometrischen Zustandsgleichungen mit $\bar{\varrho}_0$, $\bar{p}_0$, $\bar{T}_0$ die Werte der Zustandsgrößen am Boden $z=0$ bezeichnet haben, bedeuten die Integrationskonstanten $\bar{\varrho}_0+\varrho_0$, $\bar{p}_0+p_0$, $\bar{T}_0+T_0$ in den zuletzt erhaltenen Gleichungen die noch von den Teilchen abhängigen Anfangswerte der Zustandsgrößen. Da wir aber nicht die Lagrangesche, sondern die Eulersche Darstellung der Strömung verwenden, müssen diese individuellen Integrationskonstanten eliminiert werden: Man erhält durch individuelle logarithmische Differentiation etwa der zweiten der drei Adiabaten die gesuchte individuelle Zustandsgleichung in der differentiellen Form $(\bar{\varrho}+\varrho)/(\bar{p}+p)=\varkappa\,\mathrm{d}(\bar{\varrho}+\varrho)/\mathrm{d}(\bar{p}+p)$ oder

$$\frac{\mathrm{d}(\bar{\varrho}+\varrho)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{(\bar{c}+c)^2}\frac{\mathrm{d}(\bar{p}+p)}{\mathrm{d}t} \qquad (4),$$

wo $(\bar{c}+c)^2=\varkappa\dfrac{\bar{p}+p}{\bar{\varrho}+\varrho}=\varkappa R(\bar{T}+T)$ das Quadrat der Schallgeschwindigkeit bezeichnet.

Im Fall einer adiabatischen Atmosphäre mit dem Temperaturfeld $\bar{T}=\bar{T}_0-\gamma^* z$ stimmen geometrischer Temperaturgradient $-\dfrac{\partial\bar{T}}{\partial z}=\gamma^*=\dfrac{\varkappa-1}{\varkappa}\dfrac{g}{R}$ und individueller Temperaturgradient $-\dfrac{\mathrm{d}(\bar{T}+T)}{\mathrm{d}z}$ überein, so daß bei quasistatischem Austausch von Luftteilchen der Schwerpunkt der gesamten Luftmasse unverändert bleibt. Der Fall $\gamma=\gamma^*$ (d. h. $n=\varkappa$) der adiabatischen Atmosphäre stellt also den indifferenten Gleichgewichtszustand dar. Die polytrope Atmosphäre ist offenbar im stabilen Gleichgewicht, wenn ihr Temperaturgradient $\gamma<\gamma^*$ (d. h. $n<\varkappa$), und im labilen Gleichgewicht, wenn $\gamma>\gamma^*$ (d. h. $n>\varkappa$) ist. Für späteren Gebrauch schreiben wir den Zusammenhang zwischen γ und n noch in der folgenden Form

$$\frac{\varkappa}{n}-1=(\varkappa-1)\left(1-\frac{\gamma}{\gamma^*}\right)=\frac{\varkappa R}{g}(\gamma^*-\gamma) \qquad (5).$$

2. Die Leewellengleichung. Wegen der zweidimensionalen und stationären Verhältnisse sind die fünf Zustandsgrößen $\bar{\varrho}+\varrho$, $\bar{p}+p$, $\bar{T}+T$, $\bar{u}+u$, w Funktionen der beiden kartesischen Lagekoordinaten x, z allein, wobei die Größen $\bar{\varrho}$, $\bar{p}$, $\bar{T}$, $\bar{u}$ des Grundzustandes durch (3), die vorgeschriebenen Bodenwerte $\bar{p}_0$, $\bar{T}_0$, $\bar{\varrho}_0=\bar{p}_0/R\,\bar{T}_0$ und die Anströmgeschwindigkeit $\bar{u}=\mathrm{const}$ gegeben sind. Die Zustandsgrößen hängen durch fünf Beziehungen zusammen, nämlich die beiden Eulerschen Bewegungsgleichungen, die Kontinuitätsgleichung, die individuelle Zustandsgleichung und die Gasgleichung. Berücksichtigt man, daß der Grundzustand von x unabhängig und die Grundströmung horizontal und konstant ist, so lauten diese hydrodynamisch-thermodynamischen Gleichungen der Reihe nach

$$(\bar{u}+u)\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\bar{\varrho}+\varrho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$(\bar{u}+u)\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\bar{\varrho}+\varrho}\frac{\partial(\bar{p}+p)}{\partial z}-g,$$

$$(\bar{u}+u)\frac{\partial\varrho}{\partial x}+w\frac{\partial(\bar{\varrho}+\varrho)}{\partial z}+(\bar{\varrho}+\varrho)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0,$$

$$(\bar{u}+u)\frac{\partial p}{\partial x}+w\frac{\partial(\bar{p}+p)}{\partial z}=(\bar{c}+c)^2\left((\bar{u}+u)\frac{\partial\varrho}{\partial x}+w\frac{\partial(\bar{\varrho}+\varrho)}{\partial z}\right)=0,$$

$$\frac{\bar{p}+p}{\bar{\varrho}+\varrho}=R(\bar{T}+T).$$

Hieraus leitet man nach der Methode der Linearisierung die atmosphärischen Störungsgleichungen für die Störgrößen ϱ, p, T, u, w ab, indem man in diesem System von Grundgleichungen alle in den Störgrößen und deren Ableitungen nicht linearen Glieder vernachlässigt und beachtet, daß wegen $\bar{p}/\bar{\varrho}=R\,\bar{T}$ und $\partial\bar{p}/\partial z=-g\,\bar{\varrho}$ der Grundzustand $\varrho=p=T=u=w=0$ eine strenge Lösung des hydrodynamisch-thermodynamischen Gleichungssystems darstellt. Danach erhält man die fünf linearen Störungsgleichungen

XUM

$$\bar{\varrho}\,\bar{u}\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

$$\bar{\varrho}\,\bar{u}\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial z}-g\,\varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

$$\bar{u}\frac{\partial \varrho}{\partial x}+w\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial z}+\bar{\varrho}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

$$\bar{u}\frac{\partial p}{\partial x}+w\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}-\bar{c}^2\left(\bar{u}\frac{\partial \varrho}{\partial x}+w\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial z}\right)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

$$p=R\,\overline{T}\cdot\varrho+R\,\bar{\varrho}\cdot T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

als Bestimmungsgleichungen für die fünf gesuchten Störgrößen ϱ, p, T, u, w. Da zunächst das Aufwindfeld $w(x,z)$ interessiert, ist das nächste Ziel die Herleitung einer Gleichung für w allein durch Elimination der übrigen Störgrößen. Hierzu eliminiere man einerseits p aus (7) und (9) und darauf ϱ mittels (8) und andererseits p aus (6) und (7) und darauf wieder ϱ mittels (8). Auf diesem von W. Tollmien angegebenen Wege erhält man zunächst zwei Gleichungen für die beiden Komponenten u und w der Störgeschwindigkeit, nämlich

$$\bar{u}^2\frac{\partial u}{\partial x}=\bar{c}^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)-g\,w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11),$$

$$\bar{u}^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\bar{c}^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)-g\frac{\partial w}{\partial z}-(\varkappa-1)\,g\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Schreibt man erstere Gleichung in der Form $-\bar{u}^2\frac{\partial w}{\partial z}=(\bar{c}^2-\bar{u}^2)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)-g\,w$ und eliminiert[8a]) man aus dieser und der letzteren Gleichung die Divergenz $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}$, so findet man wegen $\partial\,\bar{c}^2/\partial\,z=-\varkappa\,g\,(n-1)/n$ als Gleichung für w allein

$$\left(1-\frac{\bar{u}^2}{\bar{c}^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}-\frac{1-n\dfrac{\bar{u}^2}{\bar{c}^2}}{1-\dfrac{\bar{u}^2}{\bar{c}^2}}\frac{\varkappa\,g}{n\,\bar{c}^2}\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{1-\dfrac{(\varkappa-1)\,n}{\varkappa-n}\dfrac{\bar{u}^2}{\bar{c}^2}}{1-\dfrac{\bar{u}^2}{\bar{c}^2}}\frac{(\varkappa-n)\,g^2}{n\,\bar{u}^2\,\bar{c}^2}\,w=0 \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Für die weitere Untersuchung beschränken wir uns auf den praktisch allein in Betracht kommenden Fall, daß das Quadrat $\bar{u}^2/\bar{c}^2$ der Machschen Zahl innerhalb der Troposphäre gegenüber 1 zu vernachlässigen ist. Dann geht (13) in

$$\boxed{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}-\frac{\dfrac{\varkappa}{n}g}{\bar{c}^2}\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\left(\dfrac{\varkappa}{n}-1\right)g^2}{\bar{u}^2\,\bar{c}^2}\,w=0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

über. Dies ist die Leewellengleichung, eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten. Sie lautet nach Einführung der Temperatur $\overline{T}=\bar{c}^2/\varkappa\,R$ und des Temperaturgefälles $\gamma=(n-1)\,g/n\,R$ wegen der Beziehung (5):

$$\Delta w-\frac{g-R\,\gamma}{R\,\overline{T}}\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\gamma^*-\gamma}{\overline{T}}\frac{g}{\bar{u}^2}\,w=0.$$

3. Angenäherte Berücksichtigung der polytropen Schichtung und die Länge der Leewellen. Die Leewellengleichung (14) geht im Falle $n=1$ der isothermen Atmospäre in die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten über:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}-\frac{\varkappa\,g}{\bar{c}_0^2}\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{(\varkappa-1)\,g^2}{\bar{u}^2\,\bar{c}_0^2}\,w=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Die Behandlung der allgemeinen Leewellengleichung, welche an der Grenze $z=\dfrac{n\,H}{n-1}$ der polytropen Atmosphäre singulär ist, führt auf die konfluente hypergeometrische Differentialgleichung. Doch interessiert die Lösung der allgemeinen Leewellengleichung nur innerhalb der Troposphäre, da nur in dieser die Atmosphäre polytrop, in der Stratosphäre aber isotherm ist.

[8a]) Für eine ausführliche Darstellung des ganzen Eliminationsprozesses vgl. man die demnächst erscheinende 3. Auflage des Lehrbuches von H. Koschmieder: Dynamische Meteorologie, Leipzig 1943.

Nun weicht das Quadrat der Schallgeschwindigkeit in der Troposphäre nur um höchstens 10 Prozent von seinem Mittelwert ab. Wenn man daher in (14) $\bar{c}^2$ durch seinen konstanten Mittelwert ersetzt, so wird die strenge Lösung dieser vereinfachten Differentialgleichung im Bereich der Troposphäre eine gute Näherung der allgemeinen Leewellengleichung darstellen. Indem wir in diese Näherungslösung für $\bar{c}^2$ die ursprüngliche Abhängigkeit von z wieder einführen, haben wir den Einfluß der polytropen Schichtung mit einer Genauigkeit berücksichtigt, welche in den Grenzen der Linearisierung gelegen ist. Diese Berücksichtigung der polytropen Schichtung mit einem von Null verschiedenen Temperaturgradienten kommt also darauf hinaus, daß in der strengen Lösung des Leewellenproblems für isotherme Schichtung das Verhältnis $\varkappa$ der spezifischen Wärmen durch $\varkappa/n$ und das Quadrat der Schallgeschwindigkeit durch $\bar{c}_0^2\left(1-\frac{n-1}{n}\frac{z}{H}\right)$ ersetzt wird.

Es handelt sich also darum, die Leewellengleichung (14) bei konstantem $\bar{c}^2$ zu lösen. Machen wir den Ansatz

$$w = w_1\, e^{z\cdot 2\pi/l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16),$$

wo $H=\bar{c}^2/\varkappa\, g = R\,\overline{T}/g$ die Höhe der homogenen Atmosphäre für die Temperatur $\overline{T}$ ist, so genügt $w_1(x,z)$ der Wellengleichung

$$\boxed{\Delta w_1 + k^2 w_1 = 0 \quad \text{mit} \quad k=\frac{g}{\bar{u}\,\bar{c}}\sqrt{\frac{\varkappa}{n}-1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17).$$

Entsprechend der Voraussetzung über die Machsche Zahl wurde hierbei $\frac{\varkappa}{n}-1-\frac{\varkappa^2\bar{u}^2}{4\,n^2\bar{c}^2}$ durch $\frac{\varkappa}{n}-1$ ersetzt. Damit ist die Bestimmung der Aufwindkomponente w auf die Integration der viel untersuchten Wellengleichung unter den noch zu formulierenden Randbedingungen zurückgeführt.

Mit dem Ausdruck (17) für die Wellenzahl k ist auch die asymptotische Länge $\lambda=2\pi/k$ und die „Orbitalfrequenz" $2\pi\bar{u}/\lambda=\bar{u}\,k$ der Leewellen gegeben. Die Orbitalfrequenz $\frac{g}{\bar{c}}\sqrt{\frac{\varkappa}{n}-1}$ ist identisch mit der von V. Bjerknes[9]) angegebenen „Transversalfrequenz" $g\sqrt{\Gamma-\Gamma^*}$, wo $\Gamma=1/n\,R\,\overline{T}=\frac{\varkappa}{n}\Big/\bar{c}^2$ und $\Gamma^*=1/\varkappa\,R\,\overline{T}=1/\bar{c}^2$ den Barotropie- bzw. den Pieozotropiekoeffizienten bezeichnen. Dieselbe Transversalfrequenz erhält man auch als Kreisfrequenz der quasistatischen kleinen Vertikalschwingungen eines isolierten Luftteilchens um ein mittleres Niveau z innerhalb der umgebenden, ruhenden und stabil geschichteten Luft. Denn ist ζ die kleine Vertikalverschiebung des betrachteten Luftteilchens und $\overline{T}=\overline{T}_0-\gamma z$ die gemeinsame Temperatur des Teilchens und der umgebenden Luft in der Gleichgewichtshöhe z, dann ist $T'=\overline{T}_0-\gamma(z+\zeta)=\overline{T}-\gamma\zeta$ die Temperatur der umgebenden Luft in der Höhe $z+\zeta$ und $T=\overline{T}\left(1-\frac{\gamma\zeta}{\overline{T}}\right)^{\gamma^*/\gamma}=\overline{T}-\gamma^*\zeta+\cdots$ die Temperatur des von der Höhe z auf diese Höhe $z+\zeta$ adiabatisch verschobenen Luftteilchen; ferner ist die Vertikalbeschleunigung pro Masseneinheit des isolierten Luftteilchens bei Beschränkung auf quasistatische Bewegung durch $\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}\,t^2}=g\frac{T-T'}{T'}$ gegeben; führt man hierin für T und T' ihre Abhängigkeit von ζ ein, so ergibt sich bis auf kleine Größen zweiter Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}\,t^2}+\frac{g(\gamma^*-\gamma)}{\overline{T}}\zeta=0.$$

Aus dieser einfachen Schwingungsgleichung entnimmt man die Kreisfrequenz $\sqrt{g(\gamma^*-\gamma)/\overline{T}}$, die wegen (5) mit der Orbitalfrequenz der Leewellen übereinstimmt[10]). Beachtet man, daß das

[9]) V. Bjerknes u. Mitarbeiter: Physikalische Hydrodynamik. Berlin 1933, S. 328 u. S. 370 ff.

[10]) Diese Orbitalfrequenz $\sqrt{g(\gamma^*-\gamma)/\overline{T}}$ der Leewellen findet sich zum ersten Mal bei P. Raethjen: Das zweidimensionale, atmosphärische Stromfeld um ein Hindernis, Z. Flugtechn. Bd. 17 (1926), S. 185 bis 190. Vergl. auch Raethjens eingehende Untersuchungen: Zur Vertikalbewegung im atmosphärischen Kontinuum, Meteor. Z. Bd. 46 (1929), S. 292 bis 300, S. 329 bis 337, S. 383 bis 393, S. 420 bis 435, und: Stationäre Strömung unter dem Einfluß der Schwere in stabil geschichteten Flüssigkeiten und Gasen, insbesondere der Atmosphäre, Meteor. Z. Bd. 48 (1931), S. 288 bis 306. Auf denselben Ausdruck für die Orbitalfrequenz der Leewellen kommt F. Linke durch die oben wiedergegebene Überlegung in seiner Abhandlung: Zur Vertikalbewegung isolierter Luftmassen, Meteor. Z. Bd. 45 (1928), S. 255 bis 263. Dieselbe Frequenz tritt auch noch in anderem Zusammenhang auf. Z. B. hat eine in dieser Zeitschrift demnächst erscheinende Arbeit von H. Görtler „Über eine Schwingungserscheinung in Flüssigkeiten mit stabiler Dichteschichtung" ergeben, daß bei kleinen erzwungenen Schwingungen mit einem örtlichen Regularitätsdefekt der Verschiebungsamplituden zugleich auch entsprechende Störungen in allen Punkten gewisser Flächen auftreten, wenn die Schwingungsfrequenz unterhalb einer kritischen Frequenz liegt, welche gerade gleich der Orbitalfrequenz der Leewellen ist.

XUM

von Th. Hesselberg eingeführte Stabilitätsmaß $E=(\gamma^*-\gamma)/\overline{T}$ auch durch die logarithmische Ableitung $\frac{\partial\Theta}{\partial z}\Big/\Theta$ der durch $T/\Theta=(\overline{p}/\overline{p}_0)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}$ oder durch $\Theta=T_0\left(1-\frac{n-1}{n}\frac{z}{H}\right)^{-\frac{\varkappa-n}{\varkappa(n-1)}}$ definierten potentiellen Temperatur Θ gegeben ist, so erhält man nach diesen Umformungen für die Länge der Leewellen die folgenden Darstellungen

$$\lambda=\frac{2\pi\bar{u}\bar{c}}{g\sqrt{\frac{\varkappa}{n}-1}}=2\pi\bar{u}\sqrt{\frac{\varkappa n}{\varkappa-n}\frac{H}{g}}=\frac{2\pi\bar{u}}{\sqrt{g\frac{\partial\Theta}{\partial z}\Big/\Theta}}=\frac{2\pi\bar{u}}{g\sqrt{\Gamma-\Gamma^*}}=2\pi\bar{u}\sqrt{\frac{\overline{T}}{g(\gamma^*-\gamma)}}\quad\ldots\quad(18).$$

Insbesondere geht aus dem letzteren Ausdruck hervor, daß die Länge der Leewellen allein von der Temperatur, dem Temperaturgradienten und der Anströmgeschwindigkeit abhängt[10a]). Setzt man in diese Wellenformel (18) z. B. die von J. Küttner[10b]) auf Grund zahlreicher Beobachtungen gemessenen Mittelwerte $\overline{T}=248^\circ\,\mathrm{K}$, $\gamma=0{,}006^\circ\,\mathrm{C/m}$, $\bar{u}=15\,\mathrm{m\,sec^{-1}}$ ein, welche etwa der Wetterlage vom 21. Mai 1935 entsprechen, so ergibt sich die Wellenlänge zu $\lambda=7700$ m in genauer Übereinstimmung mit der Beobachtung.

4. Formulierung der Randwertaufgabe. Zu dem System der hydrodynamisch-thermodynamischen Grundgleichungen auf S. 6 treten noch die durch das Strömungsproblem gegebenen Grenzflächenbedingungen. Da die freie Atmosphäre nur den Boden zur äußeren Begrenzungsfläche hat und wir sonst keine inneren Diskontinuitätsflächen voraussetzen, kommt zu den Grundgleichungen nur die kinematische Grenzflächenbedingung hinzu, welche das Verschwinden der Normalkomponente der Geschwindigkeit am Boden verlangt. Ist $z=\zeta_0(x)$ die Gleichung der Kontur des Bodenprofils, so lautet diese Bedingung

$$w(x,\zeta_0(x))=[\bar{u}+u(x,\zeta_0(x))]\,\zeta_0'(x).$$

Die Höhe $\zeta_0(x)$ der Bodenerhebung sei für alle x gegenüber der Wellenlänge λ klein von erster Ordnung. Da für alle x bis auf kleine Größen zweiter Ordnung $u(x,\zeta_0)=u(x,0)$ und $w(x,\zeta_0)=w(x,0)$ und wegen (16) $w(x,0)=\varrho w_1(x,0)$ ist, so lautet die kinematische Grenzflächenbedingung in linearisierter Form

$$\boxed{w_1(x,0)=\bar{u}\,\zeta_0'(x)}\quad\ldots\quad(19).$$

Hierbei wurde von erster Ordnung kleines $\zeta_0'(x)$, d. h. flach ansteigende Bodenerhebung vorausgesetzt; jedoch kann diese Randbedingung auch für beliebig steil ansteigende Plateau- und Berghänge beibehalten werden: denn wegen des elliptischen Typus der Differentialgleichung (14) wird die Steigung $w(x,z)/(\bar{u}+u(x,z))$ der Stromlinie im Punkte (x,z) mit wachsender Höhe z sehr rasch eine für alle x kleine Größe erster Ordnung, so daß (19) schon für eine nahe am Boden verlaufende Stromlinie als neue Bodenkontur bis auf kleine Größen zweiter Ordnung eine strenge Randbedingung darstellt. Da wir nach den Darlegungen im vorigen Abschnitt bei der Berücksichtigung der polytropen Schichtung von der Leewellengleichung für isotherme Atmosphäre ausgingen, also eine Lösung in unendlich hoher Atmosphäre zu bestimmen haben, so ist die Bedingung (19) noch durch eine Aussage über das Verhalten der Größe w_1 im Unendlichen zu ergänzen. Nun ist für $z\to+\infty$ nicht das Verschwinden der Vertikalkomponente w, sondern nur das Verschwinden der Energie $\frac{\bar{\varrho}}{2}w^2$ der vertikalen Störbewegung pro Volumeneinheit eine physikalisch notwendige Forderung. Da in der unendlich hohen isothermen Atmosphäre $\frac{\bar{\varrho}}{2}w^2\sim e^{-z/H}(e^{z/2H}w_1)^2=w_1^2$ ist, tritt zu (19) noch die Forderung

$$\lim w_1(x,z)=0\quad\text{für}\quad\sqrt{x^2+z^2}\to\infty\quad\ldots\quad(20)$$

als Randbedingung im Unendlichen hinzu. Damit ist die Bestimmung der Aufwindkomponente $w=w_1\,e^{z/2nH}$ auf die Lösung der folgenden Randwertaufgabe zurückgeführt: Es ist

[10a]) Diese Bemerkung bezieht sich jedoch nur auf diejenigen Leewellen, welche von der störenden Bodenerhebung einen hinreichend großen horizontalen Abstand haben, da in der noch zu bestimmenden Lösung der Wellengleichung die Länge $2\pi\bar{u}\sqrt{\overline{T}/g(\gamma^*-\gamma)}$ nur die asymptotische Wellenlänge darstellt. Mit Formel (18) wird also nur die Wellenlänge der vom Bodenhindernis entfernteren Leewellen behauptet, so daß der Einwand H. Reinhardts (Beitr. z. Phys. d. fr. Atomsphäre, Bd. 26 (1940), S. 33) gegen die Unabhängigkeit der Wellenformel (18) vom Bodenprofil hier nützutreffend ist. Die bemängelte Abweichnng der am 28. V. 1938 beobachteten Wellenlänge von der dieser Wetterlage entsprechenden theoretischen Wellenlänge rührt zu einem Teil auch daher, daß Reinhardt in Formel (18) für $\overline{T}$ fälschlich die Bodentemperatur statt die in der betrachteten Höhe herrschende Temperatur einsetzt. Im übrigen bekommt man durch eine geringe, noch im Bereich der Beobachtung gelegene Vergrößerung des Temperaturgradienten γ eine gute Übereinstimmung mit der beobachteten Wellenlänge.

[10b]) J. Küttner: a. a. O. insbesondere S. 102 ff. und S. 264.

eine im Inneren der oberen Halbebene $z>0$ reguläre Lösung w_1 der Differentialgleichung $\Delta w_1 + k^2 w_1 = 0$ zu bestimmen, welche am Rand $z=0$ die vorgeschriebenen Randwerte $\bar{u}\,\zeta_0'(x)$ annimmt und im Unendlichen verschwindet.

5. Greensche Funktion und Eindeutigkeitsproblem. Die erste Randwertaufgabe läßt sich bekanntlich auf das spezielle Problem zurückführen, eine am Rande des betrachteten Gebiets $\mathfrak{G}$ verschwindende „Quellösung" der Differentialgleichung zu bestimmen, nämlich die durch folgende Eigenschaften definierte Greensche Funktion $G(x,z;\xi,\zeta)$, wobei der Punkt $x=\xi$, $z=\zeta$, dem Gebiet $\mathfrak{G}$ angehört:

1. G genügt in bezug auf x, z im Gebiet $\mathfrak{G}$, ausgenommen im Punkte $x=\xi$, $z=\zeta$, der Differentialgleichung $\Delta G + k^2 G = 0$.
2. G wird im singulären Punkt $x=\xi$, $z=\zeta$ wie $\frac{1}{2\pi}\log\sqrt{(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2}$ unendlich, d. h. G ist im Gebiet $\mathfrak{G}$ von der Form $U(x,z)\log\sqrt{(x-\xi)^2+(z-\zeta^2)}+V(x,z)$, wo U und V in $\mathfrak{G}$ regulär sind und $U(\xi,\zeta)=\frac{1}{2\pi}$ ist.
3. G ist Null längs des Randes von $\mathfrak{G}$.

Seien nun $u(\xi,\zeta)$ und $v(\xi,\zeta)$ irgendwelche in einem Gebiet der $\xi\zeta$-Ebene reguläre Funktionen. Integriert man die Identität

$$u(\Delta v + k^2 v) - v(\Delta u + k^2 u) = \frac{\partial}{\partial\xi}\left[u\frac{\partial v}{\partial\xi} - v\frac{\partial u}{\partial\xi}\right] + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left[u\frac{\partial v}{\partial\zeta} - v\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right]$$

über ein Regularitätsbereich von u und v und wendet auf die rechte Seite den Gaußschen Integralsatz an, so erhält man die Greensche Formel der Wellengleichung

$$\int\int [u(\Delta v + k^2 v) - v(\Delta u + k^2 u)]\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\zeta = \int\left[u\frac{\partial v}{\partial\xi} - v\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\mathrm{d}\zeta - \int\left[u\frac{\partial v}{\partial\zeta} - v\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right]\mathrm{d}\xi,$$

wo das Kurvenintegral über den als analytisch und regulär vorausgesetzten Rand des Gebiets erstreckt ist. Um diese Formel auf die Greensche Funktion $u=G$ und eine reguläre Lösung $v=w_1$ der Wellengleichung anzuwenden, erstrecken wir das Flächenintegral über denjenigen Teil des Gebiets $\mathfrak{G}$, der außerhalb eines ganz in $\mathfrak{G}$ enthaltenen Kreises um (x,z) gelegen ist und erstrecken das Kurvenintegral im positiven Sinne über den Rand dieses Teilgebietes. Geht man dann in bekannter Weise mit dem Kreisradius zur Grenze Null über, so findet man die Darstellung

$$w_1(x,z) = \int w_1\left[\frac{\partial G}{\partial\xi}\,\mathrm{d}\zeta - \frac{\partial G}{\partial\zeta}\,\mathrm{d}\xi\right],$$

worin zur Ausführung des Kurvenintegrals nur die Randwerte von w_1 bekannt zu sein brauchen. Speziell für die obere Halbebene als Gebiet geht diese Formel in

$$w_1(x,z) = -\int_{-\infty}^{+\infty} w_1(\xi,0)\left(\frac{\partial G}{\partial\zeta}\right)_{\zeta=0}\mathrm{d}\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

über. Handelt es sich um ein beschränktes Gebiet $\mathfrak{G}$, dessen Rand aus einer geschlossenen, regulären und analytischen Kurve besteht, so hat die Wellengleichung bekanntlich nur entweder eine endliche Anzahl linear unabhängiger und auf dem Rande verschwindender „Eigenlösungen", oder sie hat eine und nur eine in $\mathfrak{G}$ reguläre Lösung, welche am Rand abteilungsweise stetig vorgegebene Werte annimmt. In diesem Falle ist die Greensche Funktion G eindeutig vorhanden, und die Lösung der ersten Randwertaufgabe durch obige Formel gegeben[11]). Ist aber das Gebiet $\mathfrak{G}$ unendlich, so ist jeder Wert von k, also auch (17) ein Eigenwert der Wellengleichung, zu welchem es in $\mathfrak{G}$ reguläre und am Rande verschwindende Eigenlösungen gibt[12]). Ist insbesondere $\mathfrak{G}$ die obere Halbebene $z>0$, so ist, wenn J_ν die Zylinderfunktion erster Art und ν-ter Ordnung bezeichnet,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu J_\nu(k\,r)\sin\nu\,\varphi$$

[11]) L. Lichtenstein: Journ. f. Math. Bd. 142 (1913), S. 11 bis 13.

[12]) A. Sommerfeld: Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung. Jber. dtsch. Math.-Ver. Bd. 21 (1912), S. 309 bis 353. Vgl. auch F. Pockels, Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$. Leipzig 1891, insbes. S. 206 u. S. 305 ff.

XUM

mit $x = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$, eine unendliche Mannigfaltigkeit reeller, überall in $\mathfrak{G}$ regulärer und am Rande verschwindender Lösungen, welche jeder Lösung der ersten Randwertaufgabe überlagert werden kann. Im Gegensatz zur entsprechenden Randwertaufgabe der Potentialtheorie, wo eine reguläre, am Rande und im Unendlichen verschwindende Lösung identisch Null sein muß, ist also die Lösung der Wellengleichung durch vorgeschriebene Randwerte und das Verschwinden im Unendlichen noch nicht eindeutig bestimmt. Weil aber das hydrodynamische Problem der Leewellen selbstverständlich eindeutig ist, muß in der mathematischen Analyse dieses Problems eine Bedingung hinzukommen, welche aus der unendlichen Mannigfaltigkeit möglicher Lösungen die eine durch die Natur eindeutig realisierte Lösung aussondert[13]). Es lassen sich indessen verschiedene hinreichende Zusatzbedingungen angeben, wodurch die Greensche Funktion eindeutig festgelegt wird. Im folgenden zweiten Teil kommen drei wesentlich verschiedene Methoden zur Beantwortung der Eindeutigkeitsfrage zur Darstellung.

Versteht man unter einer Grundlösung $F(x, z)$ der Wellengleichung eine solche Lösung, welche in $x = z = 0$ wie $\frac{1}{2\pi}\log\sqrt{x^2+z^2}$ unendlich wird — für die also $F(x-\xi, z-\zeta)$ die beiden erstgenannten Eigenschaften der Greenschen Funktion besitzt, aber nicht notwendig die dritte — so erhalten wir durch die Bildung

$$G(x, z; \xi, \zeta) = F(x-\xi, z-\zeta) - F(x-\xi, z+\zeta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

offenbar eine Greensche Funktion der Wellengleichung für die obere Halbebene $z > 0$. Aus der letzteren Gleichung folgt unmittelbar

$$\left[\frac{\partial G(x, z; \xi, \zeta)}{\partial \zeta}\right]_{\zeta=0} = -2\frac{\partial F(x-\xi, z)}{\partial z},$$

so daß die Formel (21) für die Lösung der allgemeinen im vorigen Abschnitt formulierten Randwertaufgabe in

$$w_1(x, z) = 2\int_{-\infty}^{\infty} w_1(\xi, 0)\frac{\partial F(x-\xi, z)}{\partial z}\,\mathrm{d}\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

übergeht. Mit Rücksicht auf den Ansatz $w = w_1 e^{z/2nH}$ und die Randbedingung $w_1(x, 0) = \bar{u}\,\zeta_0'(x)$ ist also die Lösung der Leewellengleichung für beliebige Bodenkontur $\zeta_0(x)$ durch das Integral

$$\boxed{w(x, z) = 2\bar{u}\,e^{z/2nH}\int_{-\infty}^{+\infty}\zeta_0'(\xi)\frac{\partial F(x-\xi, z)}{\partial z}\,\mathrm{d}\xi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

gegeben. Damit ist das allgemeine Leewellenproblem auf die eindeutige Bestimmung einer Grundlösung $F(x, z)$ der Wellengleichung zurückgeführt.

Nun ist die allgemeinste Grundlösung der Wellengleichung bekanntlich durch

$$F = \frac{1}{4}N_0(kr) + \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' J_\nu(kr)(a_\nu\cos\nu\varphi + b_\nu\sin\nu\varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

mit $x = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$ gegeben, worin $\frac{1}{4}N_0(kr)$ wegen $\frac{1}{4}N_0(kr) \cong \frac{1}{2\pi}\log r$ für $r \to 0$ eine spezielle Grundlösung der Wellengleichung ist, und der additiv zugefügte Reihenausdruck mit den unbestimmten Koeffizienten a_ν und b_ν die allgemeinste überall reguläre Lösung der Wellengleichung darstellt. Das Eindeutigkeitsproblem reduziert sich also auf die Frage nach der eindeutigen Bestimmung der unendlich vielen unbekannten Koeffizienten a_ν und b_ν. Die Lösung dieses Eindeutigkeitsproblems, welche im folgenden Abschnitt gegeben wird[12a]), lautet

$$a_{2\nu+1} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{2\nu+1}, \quad a_{2\nu} = 0 \quad \text{und} \quad b_\nu = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

[13]) Hierfür kommt die Sommerfeldsche „Ausstrahlungsbedingung" nicht in Betracht, da es sich bei unserem Strömungsproblem darum handelt, Strömungsquellen im Unendlichen der positiven Halbachse auszuschließen. Bei Sommerfeld stellt die abhängige Variable der Wellengleichung die Amplitude einer eigentlichen Schwingung dar, während hier das w_1 etwas ganz anderes ist, nämlich eine mit dem Faktor $e^{-z/2nH}$ versehene Geschwindigkeitskomponente einer Strömung.

[12a]) Derjenige meteorologische Leser, welcher mathematisch weniger geübt ist, kann ohne Schaden für das Verständnis den Teil II überschlagen. Eine stark elementarisierte Darstellung der Integration der Leewellengleichung findet man bei H. Koschmieder a. a. O.

für alle ν. Nehmen wir dieses Resultat vorweg, so lautet also die Lösung (24) der Leewellengleichung wegen (25) und (26) für beliebige Bodenkontur

$$w = 2\bar{u}\, e^{r \sin\varphi / 2\pi H} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_0(\xi)\, \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{4} N_0(k r) + \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} J_{2\nu+1}(k r)\, \frac{\cos(2\nu+1)\varphi}{2\nu+1}\right] \mathrm{d}\xi\,. \qquad (27).$$

Dieser Integralausdruck wird in Teil III für spezielle Bodenerhebungen auf eine leicht zu tabellierende Form gebracht.

II. Die allgemeine Lösung der Randwertaufgabe.

6. Bestimmung der Grundlösung nach der Methode der unendlich vielen Variablen. Betrachtet man die stationäre Strömung $(\bar{u} + u, w)$ über eine Bodenerhebung vom Standpunkt eines relativ zur Grundströmung $(\bar{u}, 0)$ ruhenden Koordinatensystems, so handelt es sich um diejenige instationäre Strömung, die durch die Bewegung einer mit konstanter Geschwindigkeit $-\bar{u}$ in ursprünglich ruhiger Atmosphäre fortschreitenden Bodenerhebung hervorgerufen wird. Eine physikalische Überlegung lehrt, daß dann die einzelnen Luftteilchen Bewegungen um eine mittlere Ruhelage ausführen, während hinter der bewegten Bodenstörung ein Zug interner Wellen als Wellengruppe mit der Geschwindigkeit der Bodenstörung fortschreitet. Dem entspricht die Tatsache, daß in der vom Standpunkt der Bodenerhebung aus stationären Strömung die Störung der ursprünglich geraden horizontalen Stromlinien und damit die Aufwindverteilung $w(x, z)$ längs jeder Niveaulinie $z = \text{const.}$ auf der Leeseite in hinreichender Entfernung von der Bodenerhebung aperiodisch abklingt. Diese Eigenschaft, welche sich offenbar auch auf $w_1(x, z)$ und damit auf die Grundlösung $F(x, z)$ überträgt, enthält insbesondere, daß $F(x, 0)$ für alle negativen x hinreichend großen Betrages monoton ist.

Diese letztere Eigenschaft, daß die Grundlösung für $z = 0$ eine für alle hinreichend großen Werte von $-x$ monotone Funktion ist, nehmen wir als diejenige Zusatzbedingung, welche aus der unendlichen Mannigfaltigkeit möglicher Grundlösungen

$$F = \frac{1}{4} N_0(k r) + \sum_{\nu=0}^{\infty} J_\nu(k r)\,(a_\nu \cos\nu\varphi + b_\nu \sin\nu\varphi) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

die eine durch die Natur eindeutig bestimmte Grundlösung aussondert. Wir zeigen im folgenden, daß durch diese Monotoniebedingung in der Tat die abzählbar unendlich vielen Koeffizienten a_ν und b_ν eindeutig bestimmt sind.

Zunächst sind — ganz unabhängig von der Monotoniebedingung — alle $b_\nu = 0$. Um das zu beweisen, setzen wir in Formel (23) (S. 10) für F nur den allgemeinen regulären Bestandteil $\sum_{\nu=0}^{\infty} J_\nu(k r)\,(a_\nu \cos\nu\varphi + b_\nu \sin\nu\varphi)$ ein. Dann muß die resultierende Lösung w_1 auf dem Rande $z = 0$ identisch in x verschwinden, da ja die Randbedingung bereits durch den singulären Bestandteil $\frac{1}{4} N_0(k r)$ erfüllt wird. Also ist für alle x das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_1(\xi, 0) \left[\frac{\partial \sum_{\nu=0}^{\infty} J_\nu(k r)\,(a_\nu \cos\nu\varphi + b_\nu \sin\nu\varphi)}{\partial z}\right]_{z=0} \mathrm{d}\xi = 0\,,$$

worin r und φ durch $x - \xi = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$ gegeben sind. Da aber diese Aussage für ganz beliebige Randfunktionen $w_1(\xi, 0)$ gilt, so folgt nach einem bekannten Schluß, daß dann notwendig

$$\left[\frac{\partial \sum_{\nu=0}^{\infty} J_\nu(k r)\,(a_\nu \cos\nu\varphi + b_\nu \sin\nu\varphi)}{\partial z}\right]_{z=0} = 0$$

für alle x ist. Führt man die Differentiation nach z aus, so findet man für die Ableitung an der Stelle $z = 0$, $x - \xi > 0$:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\, b_\nu J_\nu(k r) = 0$$

für alle $r > 0$. Wären nicht alle $b_\nu = 0$, so sei b_m mit $m \geqq 1$ der erste nicht verschwindende Koeffizient. Dividiert man die Reihe gliedweise durch r^m und vollzieht den Grenzübergang $r \to 0$, so ergibt sich wegen $J_m(k r) \cong \left(\frac{r}{2}\right)^m \Big/ m!$, daß $b_m = 0$ ist im Widerspruch zur Voraussetzung. Daher sind alle $b_\nu = 0$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$, w. z. b. w. Also muß jede Grund-

lösung $F(x,z)$ der Wellengleichung, wenn $F(x-\xi,z-\zeta)-F(x-\xi,z+\zeta)$ eine Greensche Funktion der oberen Halbebene sein soll, eine zur x-Achse symmetrische, d. h. in z gerade Funktion sein.

Somit ist die Grundlösung von der Form

$$F=\frac{1}{4}N_0(k\,r)+\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu J_\nu(k\,r)\cos\nu\varphi\quad\ldots\ldots\ldots\quad(2),$$

worin die noch unendlich vielen unbekannten Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ so zu bestimmen sind, daß die Monotoniebedingung erfüllt ist. Diese besagt, daß F für $\varphi=\pi$, d. h.

$$f(r)=\frac{1}{4}N_0(k\,r)+\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu a_\nu J_\nu(k\,r)$$

eine für alle hinreichend großen r monotone Funktion ist. Um bei der Bestimmung der Koeffizienten a_ν schwierigere Konvergenzuntersuchungen zu vermeiden, gehen wir zunächst von derjenigen Teilmenge aller Grundlösungen F bzw. aller Funktionen $f(r)$ aus, für welche bei fest vorgegebenem $n\geqq 0$ alle a_ν mit $\nu>2n+1$ verschwinden. Wir betrachten also zunächst den endlichen Summenausdruck

$$f_n(r)=\frac{1}{4}N_0(k\,r)+\sum_{\nu=0}^{2n+1}(-1)^\nu a_\nu J_\nu(k\,r).$$

Um für hinreichend große r ein möglichst aperiodisches Verhalten der Funktion $f_n(r)$ zu bekommen, werden wir die Koeffizienten a_ν so bestimmen, daß die in der asymptotischen Entwicklung dieser Funktion enthaltenen Wellen möglichst weitgehend gelöscht werden. Setzt man in $f_n(r)$ für die $2n+2$ Zylinderfunktionen ihre bekannten asymptotischen Entwicklungen[14]) ein und ordnet nach Potenzen von $\frac{1}{r}$, so erhält man die für alle hinreichend großen r definierte asymptotische Entwicklung

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}\,k\,r}\,f_n(r)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\mu-1}}{\mu!\,(8\,k\,r)^\mu}\left[A_\mu\sin\left(k\,r-\frac{2\mu+1}{4}\pi\right)-B_\mu\cos\left(k\,r-\frac{2\mu+1}{4}\pi\right)\right]$$

mit

$$A_\mu=\frac{(-1)^{\mu-1}}{4}\cdot 1^2\cdot 3^2\ldots(2\mu-1)^2$$
$$+\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu[4(2\nu+1)^2-1^2][4(2\nu+1)^2-3^2]\ldots[4(2\nu+1)^2-(2\mu-1)^2]\,a_{2\nu+1},$$

$$B_\mu=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu[4(2\nu)^2-1^2][4(2\nu)^2-3^2]\ldots[4(2\nu)^2-(2\mu-1)^2]\,a_{2\nu}$$

für $\mu>0$ und $A_0=-\frac{1}{4}+\sum_0^n(-1)^\nu a_{2\nu+1}$, $B_0=\sum_0^n(-1)^\nu a_{2\nu}$.

Das μ-te Glied dieser Entwicklung stellt eine Welle dar, deren Amplituden mit $r\to\infty$ wie $\left(\frac{1}{r}\right)^\mu$ abklingen. Bei den $2n+2$ uns zur Verfügung stehenden Koeffizienten a_ν erreichen wir offenbar die stärkst mögliche Löschung der in dieser Entwicklung enthaltenen Wellen dadurch, daß wir die ersten $2n+2$ Ausdrücke $A_0, A_1, \ldots, A_n, B_0, B_1, \ldots, B_n$ zum Verschwinden bringen. Wir erhalten somit ein System von $2n+2$ Bestimmungsgleichungen für die $2n+2$ unbekannten Koeffizenten $a_0, a_1, \ldots, a_{2n+1}$. Dieses System zerfällt offenbar in ein System von $n+1$ linearen Gleichungen für die Koeffizienten mit ungeradem Index und in ein ebensolches System für die Koeffizienten mit geradem Index:

$$\sum_0^n(-1)^\nu a_{2\nu+1}=\frac{1}{4}\qquad\sum_0^n(-1)^\nu a_{2\nu}=0,$$

und

$$\sum_0^n(-1)^\nu[4(2\nu+1)^2-1^2]\,a_{2\nu+1}=-\frac{1}{4}\qquad\sum_0^n(-1)^\nu[4(2\nu)^2-1^2]\,a_{2\nu}=0.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

[14]) Vgl. z. B. Jahnke-Emde: Funktionentafeln, 2. Aufl., Leipzig 1933, S. 203, oder R. Weyrich: Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen, Leipzig 1937, S. 47.

Multipliziert man in den einzelnen Gleichungen die eckigen Klammern miteinander aus und formt in naheliegender Weise der Reihe nach die zweite, dritte, ... Gleichung unter Benutzung der vorangehenden Gleichungen um, so ergibt sich — wie allgemein durch vollständige Induktion erwiesen wird —, daß die gesuchten Koeffizienten auch den folgenden beiden Systemen linearer Gleichungen genügen, welche mit den obigen äquivalent sind:

$$\sum_0^n (-1)^\nu a_{2\nu+1} = \frac{1}{4} \qquad \sum_0^n (-1)^\nu a_{2\nu} = 0,$$

und

$$\sum_0^n (-1)^\nu (2\nu+1)^2 a_{2\nu+1} = 0 \qquad \sum_0^n (-1)^\nu (2\nu)^2 a_{2\nu} = 0.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_0^n (-1)^\nu (2\nu+1)^{2n} a_{2\nu+1} = 0 \qquad \sum_0^n (-1)^\nu (2\nu)^{2n} a_{2\nu} = 0.$$

Die Determinante jedes Gleichungssystems berechnet sich als Vandermondesche Determinante[15]) zu

$$\pm 2^{n(n+1)}\, 0!\, 2!\, 4! \ldots (2n)! \qquad \text{bzw.} \qquad \pm 2^{n(n+1)}\, n! \cdot 1!\, 3!\, 5! \ldots (2n-1)!$$

Beide Determinanten sind für jedes n von Null verschieden, so daß die $2n+2$ Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_{2n+1}$ für jedes n eindeutig bestimmt sind. Weil das zweite Gleichungssystem überdies homogen ist, so sind die Koeffizienten mit geradem Index sämtlich gleich Null:

$$a_{2\nu} = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3).$$

Auch die Lösung des ersten Systems läßt sich in geschlossener Form angeben; man findet

$$a_{2\nu+1}^{(n)} = \frac{1}{2\nu+1} \frac{n+1}{4^{2n+1}} \binom{2n+1}{n} \binom{2n+1}{n-\nu} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4).$$

Hierbei wurde die Abhängigkeit des Koeffizienten von n durch einen oberen Index zum Ausdruck gebracht. Somit ist $f_n(r)$ und damit „die n-te Näherung“

$$F_n = \frac{1}{4} N_0(kr) + \sum_{\nu=0}^{n} a_{2\nu+1}^{(n)} J_{2\nu+1}(kr) \cos(2\nu+1)\varphi \qquad \cdots\cdots \quad (5)$$

der Grundlösung eindeutig bestimmt.

Nun vollziehen wir den Grenzübergang $\lim F_n$ für $n \to \infty$ und weisen nach, daß dieser Limes die gesuchte, für $\varphi = \pi$ bezüglich r monotone Grundlösung darstellt. Zunächst ergibt sich wegen der Identität $\binom{2n+1}{n}\binom{2n+1}{n-\nu} \Big/ 4^{2n+1} = \binom{-1/2}{n+1}^2 \binom{n}{\nu} \Big/ \binom{n+1+\nu}{\nu}$ aus der „Wallischen Produktformel“ $(-1)^n \binom{-1/2}{n} \cong \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ für jedes $\nu \geqq 0$, daß

$$\lim_{n\to\infty} a_{2\nu+1}^{(n)} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{2\nu+1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6).$$

Der Ausdruck (5) kann wegen $a_{2\nu+1}^{(n)} = 0$ für $\nu > n$ auch als unendliche Reihe geschrieben werden. Diese Reihe hat wegen der Beschränktheit der $a_{2\nu+1}^{(n)}$ und der Abschätzung

$$J_\nu(kr) = \frac{\left(\frac{rk}{2}\right)^\nu}{\nu!} \left[1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7)$$

für beschränkte $r \leq R$ die Majorante $K \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{kR}{2}\right)^{2\nu+1} (2\nu+1)!$, ist also für jedes n in jedem beschränkten Bereich der $r\varphi$-Ebene gleichmäßig und absolut konvergent. Daher darf in (5) der Grenzübergang für $n \to \infty$ gliedweise ausgeführt werden. Also sind die gesuchten Koeffizienten $a_{2\nu+1}$ durch den Limes (6) gegeben, und damit die Grundlösung

$$\boxed{F = \frac{1}{4} N_0(kr) + \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} J_{2\nu+1}(kr) \frac{\cos(2\nu+1)\varphi}{2\nu+1}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (8)$$

[15]) Vgl. z. B. G. Kowalewski: Einführung in die Determinantentheorie, 2. Aufl., Berlin 1925, S. 38.

eindeutig bestimmt[16]).

Es bleibt nun noch zu zeigen, daß diese so bestimmte Grundlösung (8) auch wirklich die Monotoniebedingung erfüllt. Dies folgt am einfachsten aus der Integraldarstellung

$$F=\frac{1}{4}N_0(kr)+\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi}^{\pi/2}\sin(kr\sin t)\,dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9),$$

welche unmittelbar aus der wegen (7) für jedes r bezüglich t gleichmäßig konvergenten Entwicklung[17]) des Integranden

$$\sin(kr\sin t)=2\sum_{\nu=0}^{\infty}J_{2\nu+1}(kr)\sin(2\nu+1)t$$

durch gliedweise Integration hervorgeht. Aus (9) folgt unter Anwendung der bekannten Integraldarstellung[18])

$$\frac{1}{4}N_0(kr)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-kr\operatorname{Sin}t}\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(kr\sin t)\,dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10),$$

daß insbesondere F für $\varphi=\pi$, d. h.

$$f(r)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-kr\operatorname{Sin}t}\,dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

ist. Die Monotoniebedingung, wonach $f(r)$ für alle hinreichend großen r monoton sein soll, ist in der Tat erfüllt, da

$$f(r_2)-f(r_1)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-kr_1\operatorname{Sin}t}\left(1-e^{-k(r_2-r_1)\operatorname{Sin}t}\right)dt$$

für $0<r_1<r_2$ gewiß positiv ist.

Schließlich merken wir noch an, daß die eindeutig bestimmte Grundlösung (8) nicht nur für $z=0$ und $x<0$, sondern auch für jedes z und hinreichend große Werte von $-x$ monoton ist. Die Koeffizienten $a_{2\nu+1}=\frac{1}{\pi}\frac{1}{2\nu+1}$ bewirken eine stärkst mögliche Löschung der Wellen auf der Luvseite ($x<0$) und zugleich eine optimale Verstärkung der Wellen auf der Leeseite ($x>0$). Dies ersieht man leicht aus den folgenden einfachen Umformungen der Grundlösung (9) mittels (10):

$$\left.\begin{aligned}F=&\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi-\varphi}\sin(kr\sin t)\,dt-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-kr\operatorname{Sin}t}\,dt\\ =&-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\varphi}\sin(kr\sin t)\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-kr\operatorname{Sin}t}\,dt+\frac{1}{2}N_0(kr)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (12).$$

[16]) In gewissem Sinne sind die eindeutig bestimmten Koeffizienten (6) Lösungen des Systems von unendlich vielen linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}(2\nu+1)^{2p}c_{2\nu+1}=\begin{cases}\frac{1}{4} & (p=0)\\ 0 & (p=1,2,3,\ldots)\end{cases}$$

Diese Gleichungen sind zwar — von der ersten Gleichung abgesehen — für die Lösung (6) alle divergent. Doch sind sie „A-summierbar in dem Sinne, daß die Summe der für $|x|<1$ konvergenten Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}(2\nu+1)^{2\mu}a_{2\nu+1}x^{\nu}\equiv\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}(2\nu+1)^{2\mu-1}x^{\nu}$$

für $x\to 1-0$ gegen $^1/_4$ oder 0 strebt, je nachdem $p=0$ oder $p>0$ ist. In diesem Sinne ist die Lösung (6) allerdings nicht eindeutig bestimmt, da offenbar jedes Polynom der Form

$$C_0(2\nu+1)^1+C_1(2\nu+1)^3+\ldots+C_m(2\nu+1)^{2m+1}\quad(\nu=0,1,2,\ldots)$$

eine Lösung des homogenen Systems darstellt. Vermutlich gibt es aber nur eine Lösung, nämlich (6), so daß die p-te Reihe ($p=0,1,2,\ldots$) genau „C_2p-summierbar" zur angegebenen Summe ist. Die letztere Aussage ist damit äquivalent, daß die $2p$-fach iterierten arithmetischen Mittel der Teilsummen der p-ten Reihe gegen die angegebene Summe konvergieren.

[17]) Weyrich: a. a. O. S. 90.

[18]) Weyrich: a. a. O. S. 22 oder S. 71.

Wegen $\pi - \varphi \to 0$ für $x \to -\infty$ bei festem z folgert man leicht aus der ersten Darstellung, daß $F(x,z)$ für hinreichend große Werte von $-x$ monoton wie $\frac{\cos k z}{2\pi k x}$ abklingt; wegen $\varphi \to 0$ für $x \to +\infty$ bei festem z verhält sich aber $F(x,z)$ wie $\frac{\sin(k x - \pi/4)}{\sqrt{2\pi k x}}$, also nicht monoton. Insbesondere folgt aus (12) für $z=0$ die Darstellung

$$F(x,0) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{k x \mathfrak{Sin} t}\,\mathrm{d}t & \text{für } x<0, \\ \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-k x \mathfrak{Sin} t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}N_0(k x) & \text{für } x>0. \end{cases}$$

Als n-te Näherung für die Grundlösung ist sowohl die n-te Teilsumme der Reihe (8) als auch die Summe (5) brauchbar. Erstere approximiert offenbar besser die Umgebung von $r=0$, letztere diejenige von $r=\infty$. Z. B. liefert (5) für $n=0$ die Grundlösung

$$\frac{1}{4}N_0(k r) + \frac{1}{4}J_1(k r)\cos\varphi \quad [19]).$$

Bevor wir zur numerischen Auswertung des gewonnenen Resultats übergehen (Teil III), sollen in den beiden folgenden Abschnitten noch zwei weitere Methoden zur eindeutigen Bestimmung der Greenschen Funktion erörtert werden.

7. Bestimmung der Grundlösung nach dem Rayleighschen Limitierungsverfahren. Die vorangehende Methode hat den Mangel, daß sich die Leeseitigkeit der stationären Wellen nicht als Folge der Theorie ergibt, sondern vielmehr als physikalisch begründete Voraussetzung in der Monotoniebedingung schon enthalten ist, die zur Behebung der sich einstellenden Mehrdeutigkeit des Problems hinzugekommen war. Daher soll im folgenden noch eine andere Methode zur Darstellung kommen, welche auch die Leeseitigkeit der stationären Wellen aus den Grundgleichungen der Mechanik herzuleiten gestattet. Diese Methode hat zum erstenmal Rayleigh 1883 a. a. O. zur Berechnung der (durch stationären Oberflächendruck hervorgerufenen) Leewellen auf der freien Oberfläche einer unendlich tiefen inkompressiblen Strömung angewandt. Sie beruht auf einem Kunstgriff, welcher darin besteht, daß die Unbestimmtheit des Problems zunächst durch Einführung gewisser kleiner Reibungskräfte behoben wird. Von diesen Reibungskräften wird angenommen, daß sie der Störgeschwindigkeit (u, w) proportional sind und also der Störbewegung einen Widerstand $(-\mu u, -\mu w)$ mit positivem μ entgegensetzen. Indem man in der hierdurch eindeutig bestimmten Lösung des Problems mit dem positiven $\mu \to 0$ geht, erhält man die Lösung des reibungsfreien Problems. Diese Rayleighsche Methode läßt sich, wie H. Stümke in seinem im einleitenden Abschnitt genannten Bericht für die isotherme Atmosphäre gezeigt hat, auf den vorliegenden Fall eines kompressiblen und polytrop geschichteten Mediums in der folgenden Weise übertragen.

Durch Einführung der genannten Reibungskräfte gehen die beiden Eulerschen Bewegungsgleichungen (6) und (7) (S. 6) in

$$\bar{u}\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \bar{\varrho}\,\mu\,u,$$

$$\bar{u}\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \bar{\varrho}\,\mu\,w - \varrho\,g$$

über, so daß diese zusammen mit der Kontinuitätsgleichung (8), der Zustandsgleichung (9) und der Gasgleichung (10) (S. 6) das System der atmosphärischen Störungsgleichungen bilden. Aus diesen 5 Bestimmungsgleichungen für ϱ, p, T, u und w folgt durch Elimination der vier Störgrößen ϱ, p, T, u und Berücksichtigung des Falles $\bar{u}^2/\bar{c}^2 \ll 1$ eine Differentialgleichung dritter Ordnung für w allein:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\varkappa}{n}\frac{g}{\bar{c}^2}\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\left(\frac{\varkappa}{n}-1\right)g^2}{\bar{u}^2\bar{c}^2}w\right] + \frac{\mu}{\bar{u}}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\varkappa}{n}\frac{g}{\bar{c}^2}\frac{\partial w}{\partial z}\right] = 0 \quad . \quad . \quad (13).$$

[19]) Diese Funktion wurde in der einleitend genannten Arbeit des Verf. als Grundlösung gegeben (das entgegengesetzte Vorzeichen rührt daher, daß hier die Greensche Funktion mit anderem Vorzeichen definiert ist). Dem Verf. war entgangen, daß die Reihen (14) und (17) a. a. O. S. 201 identisch sind, wie eine Umformung der Glieder und nachfolgende Umordnung ergibt. Daher ist insbesondere die a. a. O. S. 202 (Formel 19) angegebene Lösung für w nur das erste Glied einer unendlichen Folge partikulärer Lösungen, welche in jedem beschränkten Teilbereich der oberen Halbebene gleichmäßig gegen die durch die Natur eindeutig bestimmte Lösung (4) auf S. 23 der vorliegenden Arbeit konvergiert. Die früher mitgeteilte Lösung stellt also lediglich eine erste Näherung für die eindeutig bestimmte Lösung dar, von der sie sich aber wegen der starken Konvergenz der Folge (5) in einiger Entfernung vom Störungszentrum praktisch kaum unterscheidet.

XUM

Hält man wieder $\bar{c}^2$ konstant und setzt $w = w_1 e^{z/2H}$, wo $H = \bar{c}^2/\varkappa g = R\,\bar{T}/g$ die der Temperatur $\bar{T}$ entsprechende Höhe der homogenen Atmosphäre bezeichnet, so genügt w_1 der linearen Differentialgleichung 3. Ordnung

$$f_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}\right) w_1 \equiv \frac{\partial}{\partial x}[\Delta w_1 + k^2 w_1] + \frac{\mu}{\bar{u}}[\Delta w_1 - l^2 w_1] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

mit

$$\varkappa = \frac{g}{\bar{u}\bar{c}}\sqrt{\frac{\varkappa}{n} - 1} \quad \text{und} \quad l = \frac{\frac{\varkappa}{n} g}{2\bar{c}^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Die hier gestellte Randwertaufgabe, eine im Inneren der oberen Halbebene reguläre Lösung w_1 der Differentialgleichung (14) zu bestimmen, welche am Rande $z = 0$ die vorgeschriebenen Randwerte $\bar{u}\,\zeta_0'(x)$ annimmt, läßt sich auch auf die Bestimmung einer wie in Abschnitt 5 zu definierenden Greenschen Funktion zurückführen. Es wird sich im folgenden zeigen, daß eine Greensche Funktion bzw. Grundlösung des vorliegenden Problems bei hinreichend kleinem Reibungskoeffizienten $\mu > 0$ eindeutig vorhanden ist. Geht man mit dieser bestimmten Grundlösung zum rechtsseitigen Limes für $\mu \to 0$ über, so ergibt sich in der Tat gerade diejenige Lösung des reibungsfreien Problems, die wir nach der Methode des vorigen Abschnitts erhalten haben. Das Ziel der folgenden Untersuchung ist also die eindeutige Bestimmung der Grundlösung und damit der Greenschen Funktion für die Differentialgleichung

$$\boxed{f_0\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}\right) w_1 \equiv \frac{\partial}{\partial x}(\Delta w_1 + k^2 w_1) = 0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

auf dem Wege über die eindeutig vorhandene Grundlösung der Differentialgleichung (14).

Bevor wir an diese Aufgabe herantreten, verschaffen wir uns erst die der Formel (21) (S. 9) analoge für die Randwertaufgabe der Differentialgleichung (16) gültige Formel. Seien wieder $u(\xi, \zeta)$ und $v(\xi, \zeta)$ irgendwelche in einem Gebiet der $\xi\zeta$-Ebene reguläre Funktionen. Integriert man die Identität

$$u\frac{\partial}{\partial \xi}(\Delta v + k^2 v) + v\frac{\partial}{\partial \xi}(\Delta u + k^2 u) = \frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial Q}{\partial \zeta}$$

mit

$$P = v\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial \xi} + u(\Delta v + k^2 v)$$

und

$$Q = v\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \zeta} - \frac{\partial v}{\partial \zeta}\frac{\partial u}{\partial \xi}$$

über ein Regularitätsbereich der Funktionen u und v und wendet auf der rechten Seite den Gaußschen Integralsatz an, dann erhält man als Greensche Formel der Differentialgleichung (16)

$$\int\int\left[u\frac{\partial}{\partial \xi}(\Delta v + k^2 v) + v\frac{\partial}{\partial \xi}(\Delta u + k^2 u)\right] d\xi\, d\zeta = \int (P\, d\zeta - Q\, d\xi),$$

wo das Kurvenintegral wieder über den als analytisch und regulär vorausgesetzten Rand des betreffenden Gebietes erstreckt ist. Wendet man diese Formel auf die noch zu bestimmende Greensche Funktion $u = G(x, z; \xi, \zeta)$ und eine reguläre Lösung $v = w_1(x, z)$ der Differentialgleichung (16) an, indem man den Integrationsbereich in der in Abschnitt 5 angegebenen Weise wählt, und mit dem Radius des Kreises um $\xi = x$, $\zeta = z$ gegen Null geht, so findet man

$$w_1(x, z) = -\int w_1\left[\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} d\zeta - \frac{\partial^2 G}{\partial \xi\,\partial \zeta} d\xi\right].$$

Diese Formel, welche speziell für das Gebiet der oberen Halbebene in

$$w_1(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(\xi, 0)\left(\frac{\partial^2 G}{\partial \xi\,\partial \zeta}\right)_{\zeta = 0} d\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

übergeht, liefert die Lösung der vorgelegten allgemeinen Randwertaufgabe für beliebige abteilungsweise stetig vorgeschriebene Randwerte von w_1, sobald die Greensche Funktion G eindeutig bestimmt ist. Die Bestimmung der Greenschen Funktion führen wir auch wieder auf die Bestimmung der Grundlösung $F(x, z)$ zurück, aus der wir durch die Bildung $G(x, z; \xi, \zeta) = F(x - \xi, z - \zeta) - F(x - \xi, z + \zeta)$ die gesuchte Greensche Funktion für die obere Halbebene erhalten. Aus dieser Bildung folgt unmittelbar

$$\left[\frac{\partial^2 G(x, z; \xi, \zeta)}{\partial \xi\,\partial \zeta}\right]_{\zeta = 0} = 2\frac{\partial^2 F(x - \xi, z)}{\partial x\,\partial z},$$

so daß mit Rücksicht auf den Ansatz $w = w_1 e^{z/2nH}$ und die Randbedingung $w(x,0) = \bar{u}\,\zeta_0'(x)$ die Lösung der allgemeinen Leewellengleichung (13) für beliebige Bodenkontur $\zeta_0(x)$ durch die Integralformel

$$\boxed{w(x,z) = 2\bar{u}\,e^{z/2nH}\int_{-\infty}^{+\infty}\zeta_0'(\xi)\,\frac{\partial^2 F(x-\xi,z)}{\partial x\,\partial z}\,d\xi} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

gegeben ist.

Die eigentliche mathematische Aufgabe besteht somit in der eindeutigen Bestimmung der Grundlösung $F(x,z)$ der Differentialgleichung (16).

Da es sich hier nicht mehr um die Wellengleichung, sondern um die allgemeinere Differentialgleichung (16) handelt, gehen wir von einer von N. Zeilon[20]) angegebenen Definition und Integraldarstellung einer Grundlösung für allgemeine lineare partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten aus. Bekanntlich ist für eine Grundlösung $F(x,z)$ der Wellengleichung $f\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial z}\right)u \equiv \Delta u + k^2 u = 0$ charakteristisch, daß für eine in einem Gebiet $\mathfrak{G}$ willkürlich gegebene Funktion $\varphi(x,z)$ das über $\mathfrak{G}$ erstreckte Integral

$$u(x,z) = \int\int F(x-\xi, z-\zeta)\,\varphi(\xi,\zeta)\,d\xi\,d\zeta \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

in $\mathfrak{G}$ eine Lösung der zugehörigen inhomogenen Differentialgleichung $f\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial z}\right)u = \varphi(x,z)$ darstellt. Benutzt man diese Eigenschaft als Definition einer Grundlösung für eine ganz allgemeine partielle lineare Differentialgleichung mit konstantem Koeffizienten

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial z}\right)u = 0,$$

und setzt von der Funktion $\varphi(x,z)$ lediglich die Existenz ihrer Fourierschen Integraldarstellung

$$\varphi(x,z) = \frac{1}{4\pi^2}\,\Re\mathfrak{e}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int\int_{\mathfrak{G}} e^{i[\alpha(x-\xi)+\gamma(z-\zeta)]}\,\varphi(\xi,\zeta)\,d\xi\,d\zeta\,d\alpha\,d\gamma$$

voraus, so wird die Differentialgleichung $f\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial z}\right)u = \varphi(x,z)$ wegen

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial z}\right)e^{i[\alpha(x-\xi)+\gamma(z-\zeta)]} = e^{i[\alpha(x-\xi)+\gamma(z-\zeta)]}\,f(i\alpha, i\gamma)$$

formal durch den Realteil des Integrals

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int\int_{\mathfrak{G}}\frac{e^{i[\alpha(x-\xi)+\gamma(z-\zeta)]}}{f(i\alpha,i\gamma)}\,\varphi(\xi,\zeta)\,d\xi\,d\zeta\,d\alpha\,d\gamma$$

gelöst. Hieraus entnimmt man nach (19) für die Grundlösung den Zeilonschen Ansatz

$$F(x,z) = \frac{1}{4\pi^2}\,\Re\mathfrak{e}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(\alpha x+\gamma z)}}{f(i\alpha,i\gamma)}\,d\alpha\,d\gamma \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (20).$$

Für die Differentialgleichung (14) ist

$$f_\mu(i\alpha,i\gamma) = -i\alpha(\alpha^2+\gamma^2-k^2) - \frac{\mu}{\bar{u}}(\alpha^2+\gamma^2+l^2),$$

also die zugehörige Grundlösung

$$F(x,z) = \Re\mathfrak{e}\,\frac{i}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(\alpha x+\gamma z)}\,d\alpha\,d\gamma}{\alpha(\alpha^2+\gamma^2-k^2) - \frac{\mu}{\bar{u}}\,i(\alpha^2+\gamma^2+l^2)} \qquad \ldots\ldots \quad (21).$$

Damit ist die Bestimmung der Grundlösung auf die Ermittlung des rechtsseitigen Grenzwertes dieses uneigentlichen Doppelintegrals (21) für $\mu \to 0$ zurückgeführt. Ist $\mu > 0$, so konvergiert, wie sich zeigen läßt, dieses uneigentliche Integral für jedes x und z außer für $x = z = 0$. Für

[20]) N. Zeilon: Das Fundamentalintegral der allgemeinen partiellen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, Ark. för Matem. Bd. 9 (1911), Nr. 38. Vgl. auch die Darstellung in Frank-v. Mises: Differentialgleichungen der Physik, Teil I, 2. Aufl., Braunschweig 1930, S. 862 ff.

$\mu = 0$ dagegen hat das Integral keinen Sinn, da der Integrand wegen $f_0(i\alpha, i\gamma) = -i\alpha(\alpha^2+\gamma^2-k^2)$ in allen Punkten des Kreises $\alpha^2+\gamma^2=k^2$ und der Geraden $\alpha=0$ der $\alpha\gamma$-Ebene singulär ist. Wohl aber existiert der rechtsseitige Limes des Integrals für $\mu \to 0$, durch welchen der Wert des Integrals definiert wird. Die Rayleighsche Methode kommt also auf ein Verfahren zur Limitierung divergenter Integrale hinaus.

Führen wir die Integration zunächst bei festgehaltenem γ über α von $-\infty$ bis $+\infty$ aus, so kann das Ergebnis dieser Integration mit Hilfe des Residuensatzes folgendermaßen gewonnen werden. Da in der Ebene der komplexen $\alpha = R\,e^{i\Theta}$ der Integrand wegen

$$|e^{i(\alpha x+\gamma z)}| = e^{-xR\cdot\sin\Theta}$$

im Falle $x>0$ auf dem unendlich großen Halbkreis der oberen Halbebene ($\sin\Theta>0$), im Falle $x<0$ aber auf dem unendlich großen Halbkreis der unteren Halbebene ($\sin\Theta<0$) verschwindet, kann das Integral

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(\alpha x+\gamma z)}}{f_\mu(i\alpha, i\gamma)}\,d\alpha \qquad (22)$$

auch durch komplexe Integration über denjenigen geschlossenen Weg gewonnen werden, welcher aus der reellen Achse und dem oberen oder unteren unendlich großen Halbkreis der komplexen α-Ebene besteht, je nachdem x positiv oder negativ ist. Danach ist der Wert des Integrals (22) gleich der Summe der Residuen des Integranden in denjenigen Nullstellen von $f_\mu(i\alpha, i\gamma)$, welche im Inneren der oberen oder unteren Halbebene gelegen sind, je nachdem x positiv oder negativ ist. Da es nur auf den rechtsseitigen Limes des Integrals (22) für $\mu \to 0$ ankommt, und die Wurzeln der algebraischen Gleichung $f_\mu(i\alpha, i\gamma)=0$ stetig von μ abhängen, genügt es, die Residuen des Integranden für $\mu=0$ zu kennen, wobei aber das Residuum einer **reellen** Nullstelle von $f_0(i\alpha, i\gamma) = -i\alpha(\alpha^2+\gamma^2-k^2)$ zur oberen oder unteren Halbebene zu rechnen ist, je nachdem, ob diese Nullstelle für kleine positive μ in die obere oder untere Halbebene rückt. Um aber das Verhalten der Nullstellen von $f_0(i\alpha, i\gamma)$ festzustellen, wenn μ stetig von Null auf einen kleinen positiven Wert anwächst, genügt es, die Wurzeln von $f_\mu(i\alpha, i\gamma)=0$ nur bis auf Glieder, welche in μ von 2. Ordnung sind, zu bestimmen. Die elementare Rechnung ergibt

$$\begin{aligned}
\alpha_0(\mu) &= 0 \quad -\frac{i\mu}{\bar{u}}\cdot\frac{l^2+\gamma^2}{k^2-\gamma^2}+O(\mu^2),\\
\alpha_1(\mu) &= \sqrt{k^2-\gamma^2}+\frac{i\mu}{\bar{u}}\cdot\frac{k^2+l^2}{k^2-\gamma^2}+O(\mu^2),\\
\alpha_2(\mu) &= -\sqrt{k^2-\gamma^2}+\frac{i\mu}{\bar{u}}\cdot\frac{k^2+l^2}{k^2-\gamma^2}+O(\mu^2).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt: das Residuum in $\alpha_0(0)=0$ gehört zur unteren oder oberen Halbebene, je nachdem $|\gamma|<k$ oder $|\gamma|>k$ ist; die Residuen in den (für $|\gamma|<k$ reellen) Nullstellen

$$\alpha_1(0) = \sqrt{k^2-\gamma^2}$$

und

$$\alpha_2(0) = -\sqrt{k^2-\gamma^2}$$

gehören beide zur oberen Halbebene. Die Wahl des Integrationsweges erfolgt also — den vier Fällen

$$x \lessgtr 0,\ |\gamma| \lessgtr k$$

entsprechend — in der in Bild 2 angedeuteten Weise.

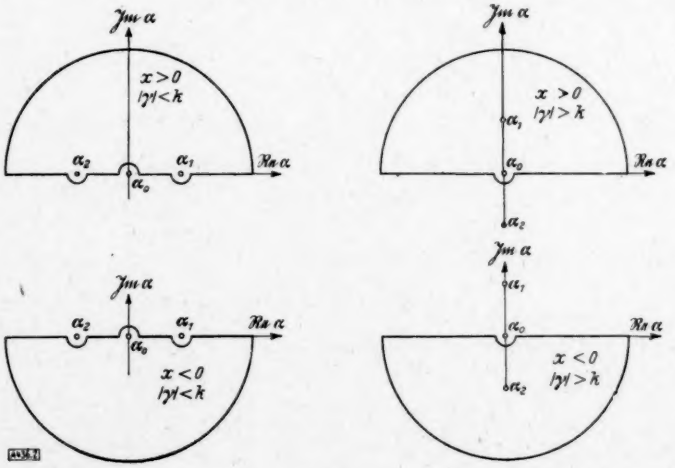


Bild 2.

Die Rayleighsche Methode, welche in der Definition

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(\alpha x+\gamma z)}}{f_0(i\alpha, i\gamma)}\,d\alpha = \lim_{\mu\to 0+0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(\alpha x+\gamma z)}}{f_\mu(i\alpha, i\gamma)}\,d\alpha \qquad (23)$$

des für $\mu = 0$ an sich sinnlosen Integrals (22) besteht, kann auch so aufgefaßt werden: Dem Integranden von (23) kann zunächst dadurch ein Sinn beigelegt werden, daß die Gerade $\gamma = \text{const}$ der reellen $\alpha\gamma$-Ebene zur komplexen α-Ebene erweitert wird und die reellen Pole des Integranden auf dem Umweg über diese komplexe Ebene umgangen werden. Dabei stellt sich insofern eine Unbestimmtheit der Aufgabe ein, als jeder der reellen Pole entweder über die obere oder die untere Halbebene umgangen werden kann, so daß sich mehrere Möglichkeiten für die Wahl des Integrationsweges bieten. Diese Mehrdeutigkeit des Problems wird nun durch die Einführung der Rayleighschen Reibungskräfte behoben, indem der Integrationsweg in der oben ausgeführten Weise eindeutig festgelegt wird.

Nun zeigt sich, daß das Integral der in dieser Weise bestimmten Funktion (23) über γ von $-\infty$ bis $+\infty$ nicht existiert. Diese Schwierigkeit ist aber leicht beseitigt, wenn man von (23) das in derselben Weise ausgewertete Integral

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\gamma z}}{f_0(i\alpha, i\gamma)}\,\mathrm{d}\alpha$$

subtrahiert, wodurch offenbar die eine Singularität $\alpha = 0$ des Integranden behoben wird. Durch diese Änderung geht das Grundintegral (20) für $\mu = 0$ in

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(\alpha x+\gamma z)}-e^{i\gamma z}}{f_0(i\alpha, i\gamma)}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

über, was auch wieder ein Grundintegral ist, da $e^{i\gamma z}/f_0(i\alpha, i\gamma)$ von x unabhängig, also $f_0\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}\right) e^{i\gamma z}/f_0(i\alpha, i\gamma) \equiv 0$ ist. Im übrigen erhielte man auch ohne diese Abänderung der Grundlösung bei formaler Rechnung dasselbe Resultat für w_1, da man nach (18) nur die Ableitung $2\,\frac{\partial^2 F(x-\xi, z)}{\partial x\,\partial z}$ benötigt, in welcher das additiv hinzugetretene Glied wieder fortfallen würde.

Um endlich das Grundintegral auszuwerten, bestimmen wir die Residuen des Integranden in bezug auf α. Diese lassen sich leicht aus der Umformung

$$\frac{1}{4\pi^2}\,\frac{e^{i(\alpha x+\gamma z)}-e^{i\gamma z}}{f_0(i\alpha, i\gamma)} = -\frac{e^{i\gamma z}}{8\pi^2 i\,(k^2-\gamma^2)}\left[-\frac{2\,(e^{i\alpha x}-1)}{\alpha} + \frac{e^{i\alpha x}-1}{\alpha-\sqrt{k^2-\gamma^2}} + \frac{e^{i\alpha x}-1}{\alpha+\sqrt{k^2-\gamma^2}}\right]$$

$$= \frac{e^{i\gamma z}}{8\pi^2 i\,(\gamma^2-k^2)}\left[-\frac{2\,(e^{i\alpha x}-1)}{\alpha} + \frac{e^{i\alpha x}-1}{\alpha-i\sqrt{\gamma^2-k^2}} + \frac{e^{i\alpha x}-1}{\alpha+i\sqrt{\gamma^2-k^2}}\right]$$

ablesen, wobei wir die erste oder zweite Darstellung verwenden, je nachdem $|\gamma| < k$ oder $|\gamma| > k$ ist.

Unter Beachtung des oben angegebenen Integrationsweges (wobei nunmehr $\alpha = 0$ keine singuläre Stelle ist, $(e^{i\alpha x}-1)/\alpha$ ist für $\alpha = 0$ natürlich durch ix zu ersetzen) findet man den vier Fällen $x \lessgtr 0$, $|\gamma| \lessgtr k$ entsprechend

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(\alpha x+\gamma z)}-e^{i\gamma z}}{f_0(i\alpha, i\gamma)}\,\mathrm{d}\alpha = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\,\dfrac{\cos x\sqrt{k^2-\gamma^2}-1}{k^2-\gamma^2}\,e^{i\gamma z} & (x>0,\ |\gamma|<k), \\ \dfrac{1}{4\pi}\,\dfrac{e^{i\gamma z}}{\gamma^2-k^2}\left(e^{-x\sqrt{\gamma^2-k^2}}-1\right) & (x>0,\ |\gamma|>k), \\ 0 & (x<0,\ |\gamma|<k), \\ -\dfrac{1}{4\pi}\,\dfrac{e^{i\gamma z}}{\gamma^2-k^2}\left(e^{x\sqrt{\gamma^2-k^2}}-1\right) & (x<0,\ |\gamma|>k). \end{cases}$$

Hieraus folgt endlich durch Integration nach γ von $-\infty$ bis $+\infty$ und Beschränkung auf den Realteil

$$F(x,z) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_k^{\infty}\frac{\cos\gamma z}{\gamma^2-k^2}\left(e^{x\sqrt{\gamma^2-k^2}}-1\right)\mathrm{d}\gamma & (x<0), \\ -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{k}\frac{\cos x\sqrt{k^2-\gamma^2}-1}{k^2-\gamma^2}\cos\gamma z\,\mathrm{d}\gamma + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_k^{\infty}\frac{\cos\gamma z}{\gamma^2-k^2}\left(e^{-x\sqrt{\gamma^2-k^2}}-1\right)\mathrm{d}\gamma & (x>0). \end{cases}$$

Damit ist die gesuchte Grundlösung der Differentialgleichung (16) des reibungsfreien Problems eindeutig bestimmt. Nach Formel (18) benötigen wir für die Lösung nur die Ableitung

$$\frac{\partial F^2(x-\xi,z)}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_k^\infty \frac{\cos\gamma z}{\sqrt{\gamma^2-k^2}}\, e^{(x-\xi)\sqrt{\gamma^2-k^2}}\,\mathrm{d}\gamma & (x<\xi) \\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^k \frac{\cos\gamma z\cdot\sin(x-\xi)\sqrt{k^2-\gamma^2}}{\sqrt{k^2-\gamma^2}}\,\mathrm{d}\gamma - \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_k^\infty \frac{\cos\gamma z}{\sqrt{\gamma^2-k^2}}\, e^{-(x-\xi)\sqrt{\gamma^2-k^2}}\,\mathrm{d}\gamma & (x>\xi) \end{cases} \tag{25}$$

Zum Schluß dieses Abschnittes soll für diesen Ausdruck noch die einheitliche für alle $x \neq 0$ gültige Stümkesche Integraldarstellung hergeleitet werden.

Sei $x<0$, oder, wenn man durch $x=r\cos\varphi$, $z=r\sin\varphi$ Polarkoordinaten einführt, $\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{3\pi}{2}$ und $r>0$. Macht man ferner die Substitution $\gamma = k\,\mathfrak{Cof}\,\tau$, so wird

$$\int_k^\infty \frac{\cos\gamma z}{\sqrt{\gamma^2-k^2}}\, e^{x\sqrt{\gamma^2-k^2}}\,\mathrm{d}\gamma = \int_0^\infty \cos(k\,r\sin\varphi\,\mathfrak{Cof}\,\tau)\, e^{k\,r\cos\varphi\,\mathfrak{Sin}\,\tau}\,\mathrm{d}\tau$$

$$= \mathfrak{Re}\int_0^\infty e^{k\,r\,\mathfrak{Sin}(\tau+i\varphi)}\,\mathrm{d}\tau.$$

Nun kann nach dem Cauchyschen Integralsatz in der $(\tau+i\sigma)$-Ebene (vgl. Bild 3) der Integrationsweg $\sigma=\varphi$, $\tau\geq 0$ durch den Weg $\tau=0$, $\varphi\leq\sigma\leq\pi$ und $s=\pi$, $\tau\geq 0$ ersetzt werden, da $\cos\sigma\,\mathfrak{Sin}\,\tau$ im Streifen $\frac{\pi}{2}<\sigma<\frac{3\pi}{2}$ negativ ist und daher

$$\left|e^{k\,r\,\mathfrak{Sin}(\tau+i\sigma)}\right| = e^{\cos\sigma\,\mathfrak{Sin}\,\tau}\to 0$$

strebt für $\tau\to+\infty$. Also wird wegen $\mathfrak{Sin}\,i\sigma = i\sin\sigma$, $\mathfrak{Sin}(\tau+i\pi) = -\mathfrak{Sin}\,\tau$:

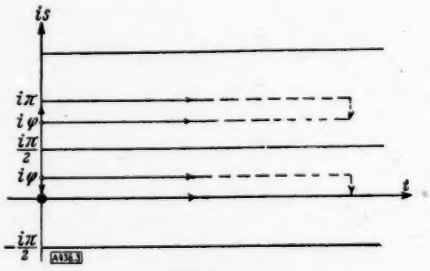


Bild 3.

$$\int_k^\infty \frac{\cos\gamma z}{\sqrt{\gamma^2-k^2}}\, e^{x\sqrt{\gamma^2-k^2}}\,\mathrm{d}\gamma = \mathfrak{Re}\int_\varphi^\pi e^{k\,r\,\mathfrak{Sin}\,i\sigma}\, i\,\mathrm{d}\sigma + \int_0^\infty e^{k\,r\,\mathfrak{Sin}(\tau+i\pi)}\,\mathrm{d}t$$

$$= -\int_\varphi^\pi \sin(k\,r\sin\sigma)\,\mathrm{d}\sigma + \int_0^\infty e^{-k\,r\,\mathfrak{Sin}\,\tau}\,\mathrm{d}\tau$$

$$= -2\pi\left[\frac{1}{4}N_0(k\,r) + \frac{1}{2\pi}\int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} \sin(k\,r\sin t)\,\mathrm{d}t\right],$$

letzteres nach der Poissonschen Integraldarstellung der Zylinderfunktion N_0.

Sei jetzt $x>0$, d. h. $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$; substituiert man $\gamma = k\,\mathfrak{Cof}\,\tau$ falls $\gamma>k$ und $\gamma = k\cos\tau$ falls $0<\gamma<k$, so wird

$$\int_k^\infty \frac{\cos\gamma z}{\sqrt{\gamma^2-k^2}}\, e^{-x\sqrt{\gamma^2-k^2}}\,\mathrm{d}\gamma - 2\int_0^k \frac{\cos\gamma z\cdot\sin x\sqrt{k^2-\gamma^2}}{\sqrt{k^2-\gamma^2}}\,\mathrm{d}\gamma$$

$$= \int_0^\infty \cos(k\,r\sin\varphi\,\mathfrak{Cof}\,\tau)\, e^{-k\,r\cos\varphi\,\mathfrak{Sin}\,\tau}\,\mathrm{d}\tau + 2\int_{\pi/2}^0 \cos(k\,r\sin\varphi\cos\tau)\cdot\sin(k\,r\cos\varphi\sin\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$= \mathfrak{Re}\int_0^\infty e^{-k\,r\,\mathfrak{Sin}(\tau+i\varphi)}\,\mathrm{d}\tau - \int_0^{\pi/2}[\sin(k\,r\sin(\varphi+\tau)) - \sin(k\,r\sin(\varphi-\tau))]\,\mathrm{d}\tau$$

$$= \mathfrak{Re}\int_0^\varphi e^{-k\,r\,\mathfrak{Sin}\,i\sigma}\, i\,\mathrm{d}\sigma + \int_0^\infty e^{-k\,r\,\mathfrak{Sin}\,\tau}\,\mathrm{d}\tau - \int_\varphi^{\varphi+\pi/2} \sin(k\,r\sin\tau)\,\mathrm{d}\tau - \int_\varphi^{\varphi-\pi/2} \sin(k\,r\sin\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$= -\int_0^{\pi-\varphi} \sin(k\,r\sin t)\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty e^{-k\,r\,\mathfrak{Sin}\,t}\,\mathrm{d}t = -2\pi\left[\frac{1}{4}N_0(k\,r) + \frac{1}{2\pi}\int_\varphi^{\pi/2} \sin(k\,r\sin t)\,\mathrm{d}t\right].$$

Wegen (25) haben wir also die für $x \neq 0$ gültige Darstellur

$$\frac{F^2(x-\xi,z)}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{4}N_0(kr) + \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi}^{\pi/2}\sin(kr\sin t)\,dt\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26).$$

Der Vergleich mit (9) (S. 14) ergibt, daß die 2. Ableitung $\partial^2 F(x-\xi,z)/\partial x\,\partial z$ der Grundlösung der Differentialgleichung $\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w_1 + k^2 w_1) = 0$ identisch ist mit der im 6. Abschnitt erhaltenen 1. Ableitung $\partial F(x-\xi,z)/\partial z$ der Grundlösung der Differentialgleichung $\Delta w_1 + k^2 w_1 = 0$, so daß wegen der Formeln (24) (S. 10) und (18) die nach beiden Methoden erhaltenen Lösungen für w_1 übereinstimmen.

8. Bestimmung der Grundlösung durch Aussonderung mittels der Monotoniebedingung. Am einfachsten gewinnt man folgendermaßen die Grundlösung unseres Problems: Man geht von einer Grundlösung der Wellengleichung $\Delta w_1 + k^2 w_1 = 0$ in der Zeilonschen Integraldarstellung

$$F(x,z) = \Re\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(\alpha x+\gamma z)}}{k^2-\alpha^2-\gamma^2}\,d\alpha\,d\gamma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

aus; zunächst wird diesem Integral dadurch ein Sinn beigelegt, daß bei festem γ die Integration hinsichtlich α unter Umgehung der reellen Nullstellen von $k^2-\alpha^2-\gamma^2$ auf dem Umweg über die komplexe α-Ebene ausgeführt wird (vgl. S. 18/19); sodann wird die Wahl des hierbei noch unbestimmt bleibenden Integrationsweges durch die Monotoniebedingung eindeutig festgelegt.

Zunächst lautet nach leichter Umformung das Zeilonsche Fundamentalintegral

$$\left.\begin{aligned} F(x,z) = &\int_0^k\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha x}\cos\gamma z}{4\pi^2\sqrt{k^2-\gamma^2}}\left(\frac{1}{\alpha+\sqrt{k^2-\gamma^2}}-\frac{1}{\alpha-\sqrt{k^2-\gamma^2}}\right)d\alpha\right]d\gamma \\ &+\int_k^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha x}\cos\gamma z}{4\pi^2 i\sqrt{\gamma^2-k^2}}\left(\frac{1}{\alpha+i\sqrt{\gamma^2-k^2}}-\frac{1}{\alpha-i\sqrt{\gamma^2-k^2}}\right)d\alpha\right]d\gamma \end{aligned}\right\} \quad (28).$$

Die beiden inneren Integrale hinsichtlich α werten wir wieder mit Hilfe des Residuumsatzes aus: nach der Überlegung auf S. 18/19 sind die inneren Integrale gleich der Summe der Residuen des Integranden in denjenigen seiner Pole, welche im Inneren der oberen oder unteren Halbebene gelegen sind, je nachdem $x > 0$ oder $x < 0$ ist. Dabei kann jetzt aber jede der beiden rellen Pole $\alpha_1 = \sqrt{k^2-\gamma^2}$, $\alpha_2 = -\sqrt{k^2-\gamma^2}$ des ersten Integranden zur oberen o d e r zur unteren Ebene gerechnet werden. Daher ergeben sich vier Möglichkeiten für die Wahl des Integrationsweges: entweder rechnet man beide Pole zur oberen Halbebene (erster Weg), oder beide zur unteren Halbebene (zweiter Weg), oder den einen zur unteren und den anderen zur oberen Halbebene (dritter bzw. vierter Weg). Bei Wahl des ersten Integrationsweges ergibt sich fast unmittelbar aus (28)

$$F_1(x,z) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_k^{\infty}\frac{\cos\gamma z}{\sqrt{\gamma^2-k^2}}\,e^{x\sqrt{\gamma^2-k^2}}\,d\gamma & (x<0), \\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^k\frac{\sin x\sqrt{k^2-\gamma^2}\cdot\cos\gamma z}{\sqrt{k^2-\gamma^2}}\,d\gamma - \frac{1}{2\pi}\int_k^{\infty}\frac{\cos\gamma z}{\sqrt{\gamma^2-k^2}}\,e^{-x\sqrt{\gamma^2-k^2}}\,d\gamma & (x>0). \end{cases}$$

Wegen der Formeln (25) und (26) ist daher

$$F_1(x,z) = \frac{1}{4}N_0(kr) + \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi}^{\pi/2}\sin(kr\sin t)\,dt.$$

Auf dem zweiten Integrationsweg findet man

$$F_2(x,z) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^k\frac{\sin x\sqrt{k^2-\gamma^2}\cdot\cos\gamma z}{\sqrt{k^2-\gamma^2}}\,d\gamma - \frac{1}{2\pi}\int_k^{\infty}\frac{\cos\gamma z}{\sqrt{\gamma^2-k^2}}\,e^{x\sqrt{\gamma^2-k^2}}\,d\gamma & (x<0), \\ -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_k^{\infty}\frac{\cos\gamma z}{\sqrt{\gamma^2-k^2}}\,e^{-x\sqrt{\gamma^2-k^2}}\,d\gamma & (x>0), \end{cases}$$

also $= F_1(-x, z)$; daher ist

$$F_2(x,z) = \frac{1}{4} N_0(kr) + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-\varphi}^{\pi/2} \sin(kr \sin t)\, dt.$$

Auf dem dritten und vierten Integrationsweg gelangt man zum selben Ergebnis, nämlich

$$F_3(x,z) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma}^{k} \frac{\cos\gamma z \cdot \sin x\sqrt{k^2-\gamma^2}}{\sqrt{k^2-\gamma^2}}\, d\gamma - \frac{1}{2\pi} \int_{k}^{\infty} \frac{\cos\gamma z}{\sqrt{\gamma^2-k^2}} e^{x\sqrt{\gamma^2-k^2}}\, d\gamma & (x<0), \\ \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{k} \frac{\cos\gamma z \cdot \sin x\sqrt{k^2-\gamma^2}}{\sqrt{k^2-\gamma^2}}\, d\gamma - \frac{1}{2\pi} \int_{k}^{\infty} \frac{\cos\gamma z}{\sqrt{\gamma^2-k^2}} e^{-x\sqrt{\gamma^2-k^2}}\, d\gamma & (x>0), \end{cases}$$

also $2F_3 = F_1 + F_2$. Daher ist

$$F_3(x,z) = \frac{1}{4} N_0(kr).$$

Je zwei dieser drei Grundlösungen sind linear unabhängig, so daß man die unendliche Mannigfaltigkeit

$$F(x,z) = cF_1 + (1-c)F_3 = \frac{1}{4} N_0(kr) + \frac{c}{2\pi} \int_{\varphi}^{\pi/2} \sin(kr \sin t)\, dt$$

von Grundlösungen erhält, wo c beliebig reell ist. Es gilt aus dieser mittels der Monotoniebedingung eine Grundlösung eindeutig auszusondern. Zu diesem Zweck schreiben wir nach (11) (S. 14) die Grundlösung F für $z=0$ und $x<0$ in der Form

$$\boxed{F(x,0) = cF_1(x,0) + (1-c)F_3(x,0) = \frac{1-c}{4} N_0(kr) - \frac{c}{2\pi} \cdot \int_0^{\infty} e^{-kr\,\mathfrak{Sin}\,t}\, dt.}$$

Aus dieser Darstellung liest man unmittelbar ab, daß $F(x,0) \equiv f(r)$ für hinreichend große r dann und nur dann monoton ausfällt, wenn $c=1$ ist. Also ist $F_1(x,z)$ die gesuchte Grundlösung in Übereinstimmung mit dem Ergebnis (9) (S. 14) der Methode des 6. Abschnittes.

III. Meteorologische Anwendungen der Theorie.

9. Die Aufwindverteilung über spezielle Bodenerhebungen. Die Lösung des allgemeinen Leewellenproblems, d. h. die Aufwindverteilung $w(x,z)$ in einer polytrop geschichteten atmosphärischen Strömung über dem Boden mit der beliebig vorgeschriebenen Kontur $z = \zeta_0(x)$ ist nach den übereinstimmenden Ergebnissen der vorstehenden drei Abschnitte durch die Integralformel

$$w(x,z) = 2\bar{u} e^{z/2nH} \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta_0'(\xi) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{4} N_0(kr) + \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} J_{2\nu+1}(kr) \frac{\cos(2\nu+1)\varphi}{2\nu+1} \right] d\xi \quad . \quad . \quad (1)$$

mit $x - \xi = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$ gegeben, worin $\bar{u}$ die Anströmgeschwindigkeit, $H = \bar{c}^2/\varkappa g = R\bar{T}/g$ die Höhe der zur Temperatur $\bar{T}$ gehörigen homogenen Atmosphäre bezeichnen und die Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ durch

$$\lambda = \frac{2\pi\bar{u}\bar{c}}{g\sqrt{\frac{\varkappa}{n}-1}} = 2\pi\bar{u}\sqrt{\frac{\varkappa n}{\varkappa - n}\frac{H}{g}} = 2\pi\bar{u}\sqrt{\frac{\bar{T}}{g(\gamma^*-\gamma)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

gegeben ist. Dabei ist $\gamma = \frac{n-1}{n}\frac{g}{R} = -\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}$ und $\gamma^* = \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{g}{R}$ der vertikale bzw. der adiabatische Temperaturgradient.

Die einfachste Bodenerhebung, aus der jede andere Bodenform durch hinreichend feine Superposition beliebig approximiert werden kann, ist offenbar das Hochplateau mit vertikalem Hang. Sei h die Plateauhöhe, und der Plateauhang in $x=0$ gelegen, so ist die Kontur des Plateauprofils durch

$$\zeta_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ h & \text{für } x > 0 \end{cases} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

gegeben. Aus der allgemeinen Integralformel (1) folgt durch partielle Integration wegen der Randwerte (3) und des Verschwindens der Ableitung $\frac{\partial}{\partial z}[\ldots]$ im Unendlichen für die Aufwindverteilung w_P über dem Plateau (3):

$$w_P(x,z) = -2\bar{u}\, e^{z/2nH} \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta_0(\xi) \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial z}\left[\frac{1}{4} N_0(kr) + \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty} J_{2\nu+1}(kr) \frac{\cos(2\nu+1)\varphi}{2\nu+1}\right] \mathrm{d}\xi$$

$$= 2\bar{u}\, h\, e^{z/2nH} \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{4} N_0(kr) + \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty} J_{2\nu+1}(kr) \frac{\cos(2\nu+1)\varphi}{2\nu+1}\right].$$

In dem letzteren Ausdruck führen wir noch die Differentiation nach z aus und erhalten schließlich unter Anwendung bekannter Differentiationsformeln und Funktionalgleichungen für Zylinderfunktionen[21]) als Aufwindverteilung über einem Hochplateau der Höhe h den einfachen Ausdruck

$$w_P(x,z) = -2\bar{u}\, h\, k\, e^{z/2nH}\left[\frac{1}{4} N_1(kr)\sin\varphi + \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu}{(2\nu)^2-1} J_{2\nu}(kr)\sin 2\nu\varphi\right]. \quad (4).$$

Diese Darstellung wird der numerischen Berechnung von $w(x,z)$ zugrunde gelegt. Der Reihenausdruck ist leicht zu tabellieren, da auch für die Besselschen Funktionen höherer Ordnung Tafeln[22]) vorliegen und der durch Abbrechen der Reihen entstehende Fehler wegen der Beziehung

$$J_{2\nu}(kr) = \frac{(kr/2)^{2\nu}}{(2\nu)!}\left[1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right]$$

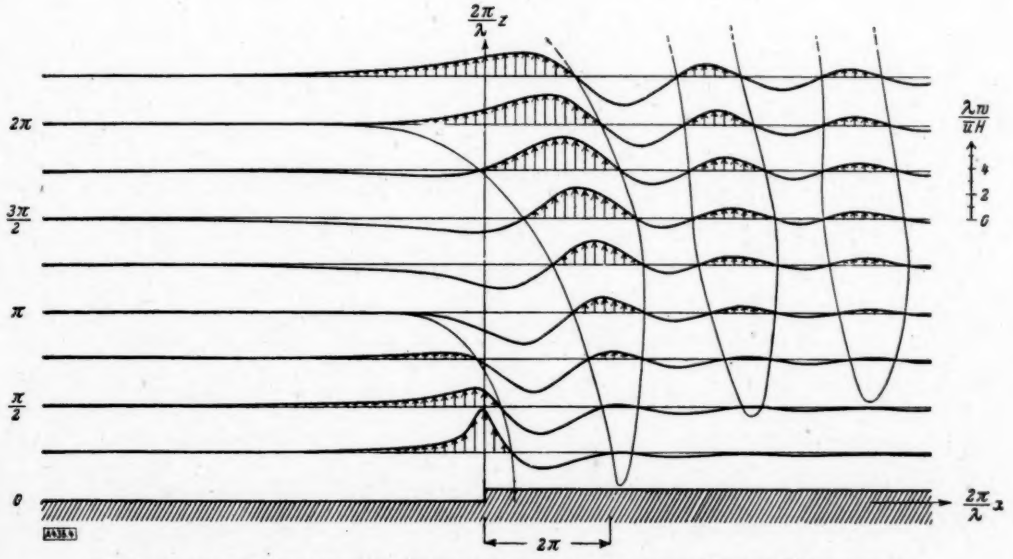


Bild 4. Aufwindverteilung längs äquidistanter Niveauflächen bei plateauförmiger Bodenerhebung.

mit wachsender Gliederzahl rasch abnimmt und leicht abgeschätzt werden kann. In Bild 4 ist die Verteilung der Aufwindkomponente w längs äquidistanter Höhen dimensionslos aufgetragen. Um das Verhalten von $w(x,z)$ bei festem z und großen Werten von $-x$ allgemein zu kennen, gehen wir von der ersten Darstellung (12) (S. 14) aus, wonach die Aufwindverteilung durch

$$w = 2\bar{u}\, h\, e^{z/2nH} \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi-\varphi} \sin(kr\sin t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-kr\sin t}\,\mathrm{d}t\right]$$

[21]) Jahnke-Emde: a. a. O. S. 212 f. oder Weyrich: a. a. O. S. 72 f.
[22]) Jahnke-Emde: a. a. O. S. 242 ff. oder Rep. of the Brit. Assoc. for the Adv. of Science, London 1915, S. 29 bis 32.

gegeben ist. Aus dieser Darstellung folgt für $x \to -\infty$ bei festem z wegen $\pi - \varphi \cong \frac{z}{r} \cong \frac{z}{|x|} \to 0$ die asymptotische Beziehung

$$w(x,z) = \frac{\bar{u}\,h}{\pi\,|x|}\, e^{z/2\,n\,H} \sin k\,z\,,$$

wonach auf der Luvseite in den Schichten $0 < kz < \pi$, $\pi < kz < 2\pi$, $2\pi < kz < 3\pi$, ... abwechselnd Aufwind und Abwind von sehr geringer Stärke herrscht. Der Aufwind der untersten Schicht ist der Hangaufwind, der nur in Hangnähe eine beträchtliche Stärke erreicht. Auf der Leeseite treten in Abständen von einer Wellenlänge Aufwindfelder auf, welche jedoch erst bei bergförmigen Bodenerhebungen stärker ausgeprägt sind. Die einfachste Bodenform ist diejenige mit rechteckförmigem Profil. Man erhält offenbar die Aufwindverteilung über einem solchen Bergrücken der Höhe h und Breite b, wenn man diejenigen beiden Aufwindfelder voneinander subtrahiert, welche von zwei um die horizontale Strecke b gegeneinander versetzten Hochplateaus derselben Höhe erzeugt werden:

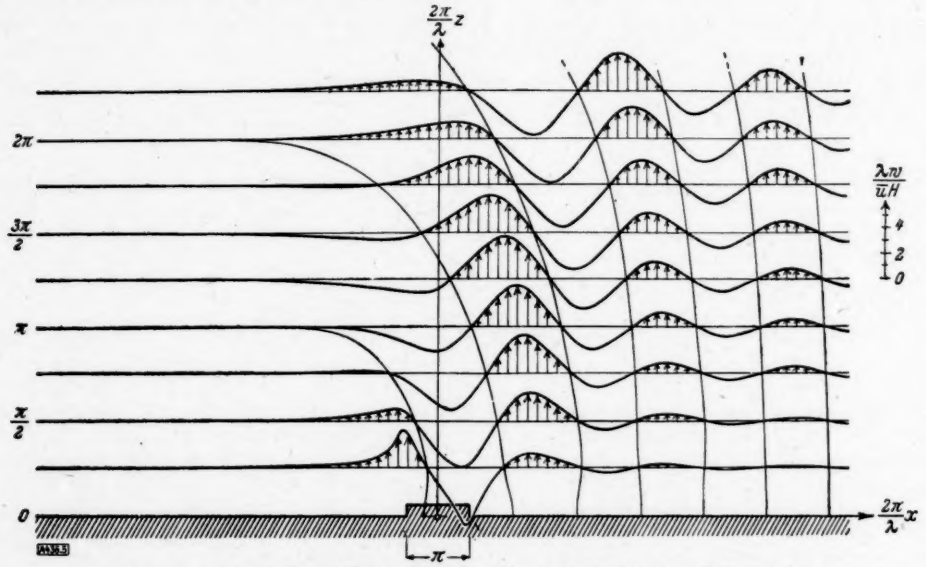


Bild 5. Aufwindverteilung längs äquidistanter Niveauflächen bei einer Bodenerhebung mit rechteckförmigem Profil der Breite $\lambda/2$.

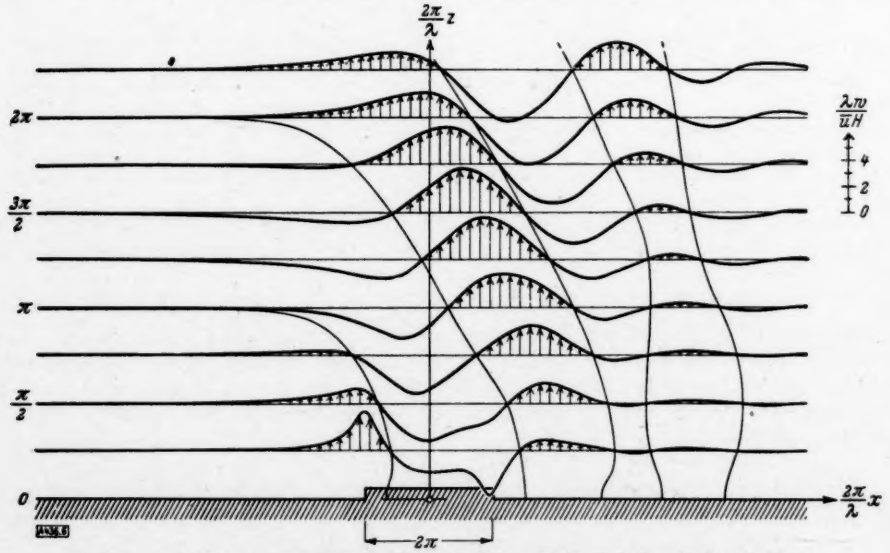


Bild 6. Aufwindverteilung längs äquidistanter Niveauflächen bei einer Bodenerhebung mit rechteckförmigem Profil der Breite λ.

$$w_P\left(x+\frac{b}{2},z\right)-w_P\left(x-\frac{b}{2},z\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4a).$$

Man bekommt dabei eine optimale Verstärkung der von den beiden vertikalen Berghängen herrührenden entfernteren Leewellen, wenn die Bergbreite gleich der halben Wellenlänge $\frac{\lambda}{2}=\frac{\pi}{k}$ ist, und eine stärkste Löschung der entfernteren Leewellen, wenn die Bergbreite gerade eine Wellenlänge $\lambda=\frac{2\pi}{k}$ beträgt. Es ist bemerkenswert, daß sich gerade in letzterem Fall das erste Aufwindfeld besonders stark ausbildet (vgl. Bild 5 und 6). Die drei Bilder 4 bis 6 sind bezüglich des Längenmaßstabes dreifach überhöht. Dagegen stellt Bild 7 die Aufwindverteilung durch Linien konstanter Aufwindstärke unverzerrt dar.

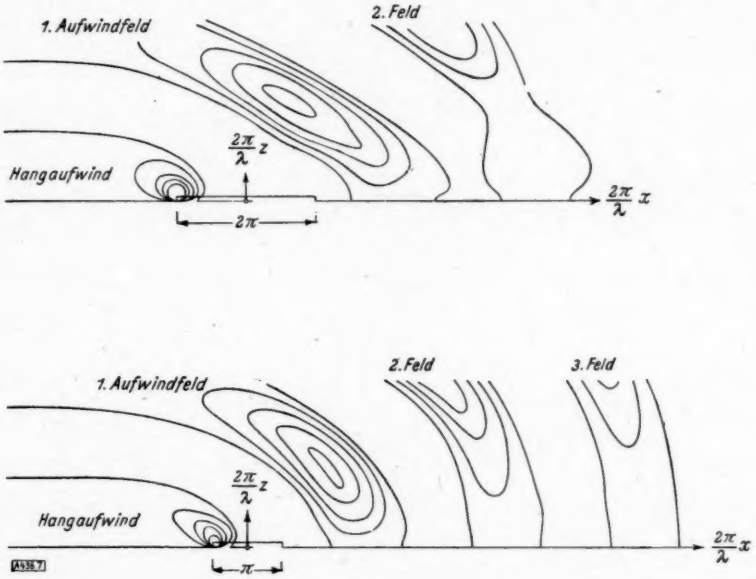


Bild 7. Darstellung der Aufwindverteilung nach Bild 5 und Bild 6 durch Linien gleichen Aufwindes.

Die durch den Punkt $(x,z)=(-\infty,z_0)$ hindurchgehende Stromlinie ist durch die Gleichung

$$z=z_0+\zeta(x,z_0) \quad \text{mit} \quad \zeta(x,z_0)=\frac{1}{\bar{u}}\int_{-\infty}^{x} w(\xi,z_0)\,\mathrm{d}\,\xi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

gegeben. Für $z_0\to 0$ konvergiert diese Stromlinie gegen die Kontur der beliebig abteilungsweise stetig angenommenen Bodenerhebung: es ist $\lim\limits_{z_0\to 0}\zeta(x,z_0)=\zeta_0(x)$ an allen Stetigkeitsstellen. In den Bildern 8 und 9 ist der Verlauf der nach (4) berechneten Stromlinien wiedergegeben, welcher den Aufwindfeldern der Bilder 5 und 6 entspricht. Aus Bild 9 ist zu ersehen, daß für die Bergbreite von einer ganzen Wellenlänge nur eine Leewelle auftritt. Die sich aus Formel (4) ergebenden maximalen Werte für w innerhalb der ersten Aufwindgebiete liegen im Bereich der beobachteten Aufwindstärken.

Die Formeln (4) und (4a) liefern trotz der Linearisierung der Randbedingung (S. 8) die richtige Verteilung des Hangaufwindes. Denn setzt man in den Ausdruck (4) die für kleine r gültige bekannte asymptotische Beziehung

$$J_{2\nu}(kr)\cong\frac{\left(\frac{kr}{2}\right)^{2\nu}}{(2\nu)!} \qquad \text{und} \qquad N_1(kr)\cong-\frac{2}{\pi}\frac{1}{kr}$$

ein, so erhält man als asymptotische Darstellung der Aufwindverteilung (4) für die Umgebung des Störzentrums $r=0$:

$$w\cong\frac{\bar{u}h}{\pi}\frac{\sin\varphi}{r}=\frac{\bar{u}h}{\pi}\frac{z}{x^2+z^2}.$$

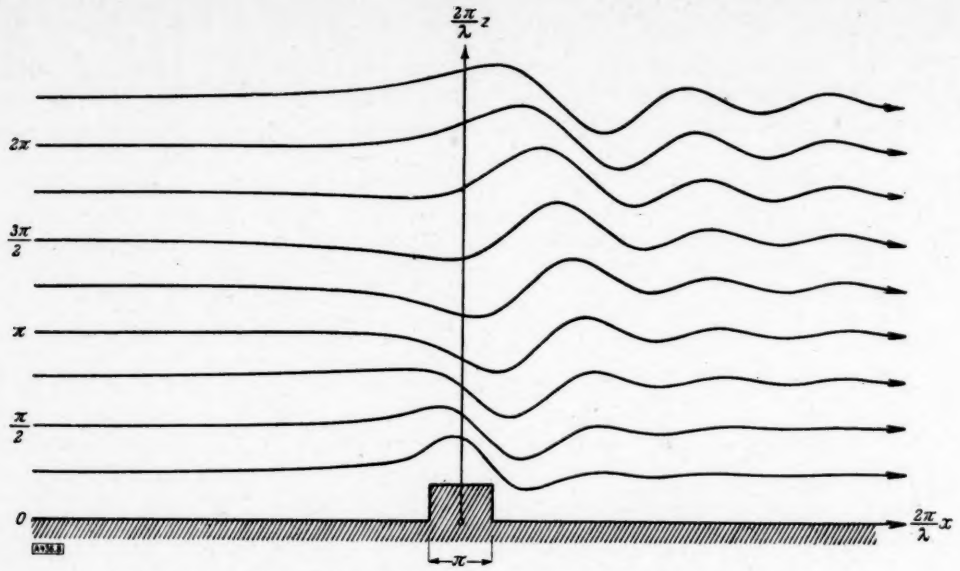


Bild 8. Stromlinien um einen Höhenzug mit rechteckförmigem Profil der Breite $\lambda/2$.

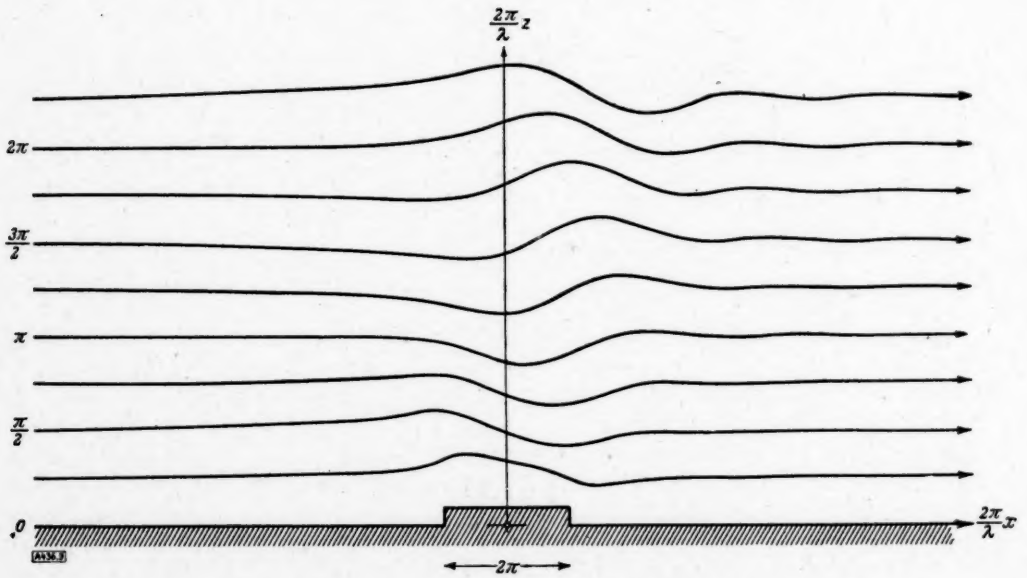


Bild 9. Stromlinien um einen Höhenzug mit rechteckförmigem Profil der Breite λ.

Daraus ergibt sich für die Linien gleichen Aufwindes in Hangnähe:

$$x^2+\left(z-\frac{\bar{u}\,h}{2\,\pi\,w}\right)^2=\left(\frac{\bar{u}\,h}{2\,\pi\,w}\right)^2,$$

was mit den Ergebnissen der bekannten durch die Erfahrung bestätigten Theorie des Aufwindes an Plateau- und Berghängen übereinstimmt[23]). Die vorliegende allgemeine Aufwindtheorie enthält also die Theorie der Hangaufwinde und der bodennahen Strömung um Hügel als Spezialfall, und beschreibt sowohl die kleinräumige Hangströmung als auch die großräumige atmosphärische Leewellenströmung durch die eine Formel (4) bzw. (1) für beliebig vorgegebene Bodenformen.

[23]) Vgl. z. B. H. Koschmieder a. a. O. § 34.

10. Druckverteilung am Boden und Rotoren. Mit der Lösung für die Aufwindverteilung w erhält man die übrigen vier Störgrößen u, p, ϱ und T durch einfache Integrationen. Eliminiert man $\frac{\partial p}{\partial x}$ aus (6) und (9) (S. 6) und ersetzt $\bar{u}\frac{\partial \varrho}{\partial x}+w\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial z}$ durch $-\bar{\varrho}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$ zufolge (8), so findet man für die Horizontalkomponente der Störgeschwindigkeit

$$u(x,z)=\int_{-\infty}^{x}\left(\frac{g}{\bar{c}^2}w-\frac{\partial w}{\partial z}\right)\mathrm{d}x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Dann ergibt sich aus (6) (S. 6) für den Störddruck $p=-\frac{\bar{u}\,\bar{p}}{gH}u$ oder

$$p(x,z)=-\frac{\bar{u}\,\bar{p}}{gH}\int_{-\infty}^{x}\left(\frac{g}{\bar{c}^2}w-\frac{\partial w}{\partial z}\right)\mathrm{d}x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Schließlich entnimmt man ϱ und T aus (7) und (10) (S. 6).

In dem Fall, daß das Profil der Bodenstörung auf den isolierten Punkt $x=z=0$ konzentriert ist, läßt sich das Integral für u und damit auch für p, ϱ und T durch stark konvergente Reihen darstellen, welche nach Zylinderfunktionen fortschreiten. Zunächst erhält man nach dem vorigen Abschnitt wegen der Linearität der Leewellengleichung die Aufwindverteilung über einem Bergrücken mit rechteckförmigem Profil der Breite b und Höhe h durch die Superposition (4a) zweier von gleich hohen Plateaus erzeugten Aufwindfelder. Ist $F=h\,b$ die Profilfläche, so lautet das Aufwindfeld für das Bergprofil

$$w_P\left(x+\frac{b}{2},z\right)-w_P\left(x-\frac{b}{2},z\right)=\frac{F}{h}\,\frac{w_P\left(x+\frac{b}{2},z\right)-w_P\left(x-\frac{b}{2},z\right)}{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

worin w_P durch Formel (4) gegeben ist. Der Grenzübergang $b\to 0$ liefert als Aufwindverteilung über einer auf die y-Achse konzentrierten Bodenerhebung mit der infinitesimalen Profilfläche F den von h unabhängigen Ausdruck

$$w=\frac{F}{h}\frac{\partial w_P}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Danach lassen sich in der Tat u und p nach (6) und (7) und damit auch ϱ und T geschlossen durch den Ausdruck (4) für w_P darstellen.

Auch für die Verschiebungen ζ der gestörten Stromlinien über einem schmalen Bergrücken mit der Profilfläche F ergibt sich nach (5) und (9) die von h unabhängige Darstellung

$$\zeta(x,z)=\frac{F}{\bar{u}\,h}w_P(x,z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Danach ist der Störddruck (7) für schmale Bodenerhebungen durch

$$\frac{p(x,z)}{\bar{p}}=-\frac{\bar{u}\,F}{g\,H\,h}\left(\frac{g}{\bar{c}^2}w_P-\frac{\partial w_P}{\partial z}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

gegeben.

Von praktischem Interesse ist die Druckverteilung am Boden $z=0$. Aus (11) folgt wegen $w_P(x,0)=0$ für $x\neq 0$ und Formel (4) für die relative Störung des Bodendrucks

$$\frac{p(x,0)}{\bar{p}_0}=-2\,k\,F\frac{\bar{u}^2}{gH}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{4}N_1(k\,r)\sin\varphi+\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2\,\nu}{(2\,\nu)^2-1}J_{2\,\nu}(k\,r)\sin 2\,\nu\,\varphi\right)\right]_{z=0}.$$

Nach Ausführung der Differentiation $\left[\frac{\partial}{\partial z}\right]_{z=0}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial \varphi}\right]_{\varphi=0}$ oder $=-\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial \varphi}\right]_{\varphi=\pi}$, je nachdem x positiv oder negativ ist, ergibt sich schließlich der folgende einfache Ausdruck für die relative Druckstörung am Boden:

$$\boxed{\frac{p(x,0)}{\bar{p}_0}=-\frac{\bar{u}^2}{gH}\frac{2\,k\,F}{|x|}\left[\frac{1}{4}N_1(k\,|x|)\mp\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(2\,\nu)^2}{(2\,\nu)^2-1}J_{2\,\nu}(k\,|x|)\right]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

worin das positive oder negative Vorzeichen gilt, je nachdem $x>0$ oder $x<0$ ist.

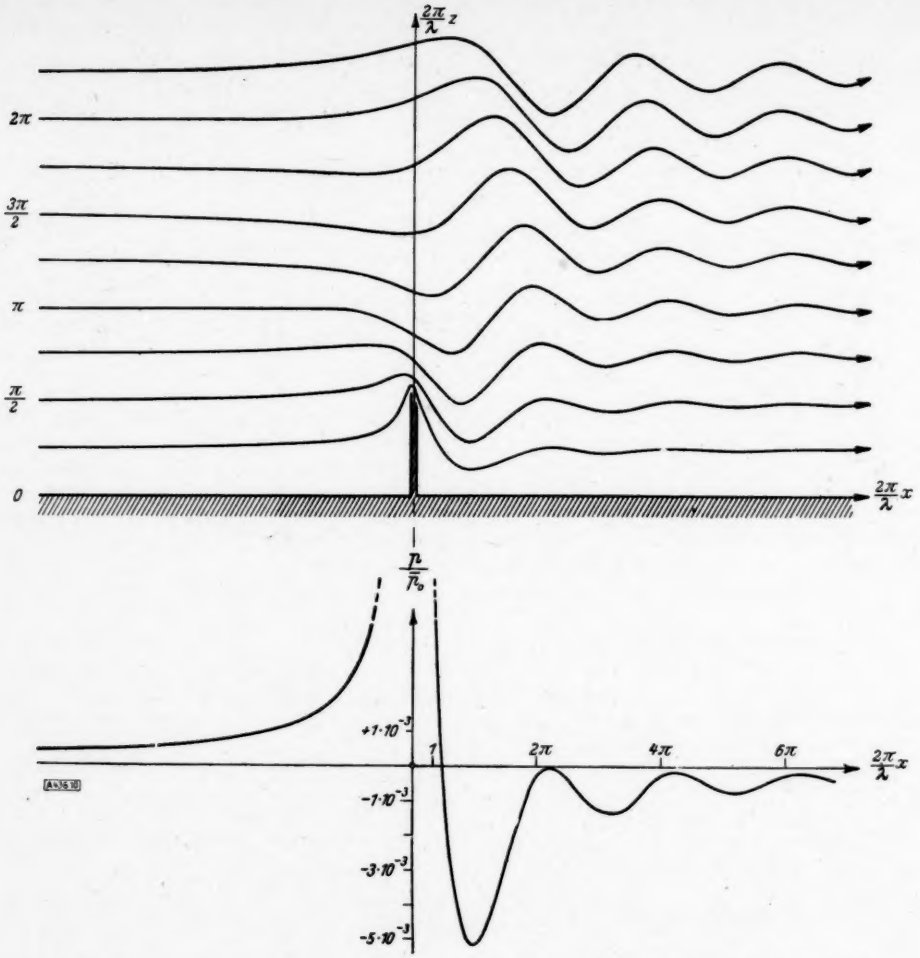


Bild 10. Verlauf der relativen Druckstörung am Boden bei schmalem Bodenhindernis.

Dieser leicht zu tabellierende Ausdruck ist in Bild 10 für die Profilfläche $F = 3.10^6\ m^2$ dargestellt. Aus diesem Barogramm geht hervor, daß am Boden horizontale Druckunterschiede von $5\,m\,b$, $1\,m\,b$ und $0{,}6\,m\,b$ unter den ersten drei Aufwindfeldern bestehen, welche wegen des Faktors $\frac{1}{|x|}$ mit wachsender Entfernung vom Bodenhindernis stark abnehmen. P. Raethjen hat zuerst darauf hingewiesen, daß sich aus solchen abnehmenden Unterschieden des Bodendrucks die Erklärung für die Entstehung der sog. „Rotoren" ergibt. In der Tat bildet sich wegen der Luftreibung in Lee der Bodenerhebung zunächst eine bodennahe Schicht mit kleiner Horizontalgeschwindigkeit aus. Da hierdurch die vorwiegend von höheren Schichten dem Boden aufgeprägte Druckverteilung (12) nicht verändert wird, so werden die über den Stellen maximalen Bodendrucks befindlichen Luftmassen in Richtung des vorangehenden kleineren Druckminimums, d. h. entgegen der Richtung der Grundströmung beschleunigt. Wenn diese vor jedem Druckmaximum beginnende Luftströmung über die Stelle maximalen Drucks hinaus in das Gebiet des Druckanstiegs eintritt, so muß sie zum Stillstand kommen und aus Kontinuitätsgründen nach oben ausweichen. Damit gelangt die Strömung in die höheren Schichten mit größerer Horizontalgeschwindigkeit und wird also in Richtung der Grundströmung mitgeführt, um sich jeweils über den Stellen maximalen Bodendrucks zu einem Wirbel zu schließen. Danach stellen die „Rotoren" nur eine Begleiterscheinung der Leewellenströmung dar, die sich ohne eine Voraussetzung von Grenzflächen lediglich aus der theoretischen Druckverteilung erklärt. 436

Charakteristikenverfahren für Kugel- und Zylinderwellen reibungsloser Gase.

Von *Robert Sauer* in Aachen.

Es wird ein auf der Charakteristikentheorie beruhendes rechnerisch-zeichnerisches Näherungsverfahren entwickelt für die nichtstationäre isentropische Gasströmung mit Kugel- oder Zylindersymmetrie.

1. Einleitung.

Bei Vernachlässigung der Reibung und Wärmeleitung und Voraussetzung konstanter Entropie führt sowohl die ebene wie auch die kugel- oder zylindersymmetrische nichtstationäre Gasströmung auf eine Potentialgleichung vom hyperbolischen Typus. Man kann sich infolgedessen des Charakteristikenverfahrens von J. Massau[1]) bedienen, was in verschiedenen Arbeiten geschehen ist. Das weitestreichende Verfahren dieser Art für sehr allgemeine Voraussetzungen stammt von G. Guderley. Das ebene Problem wurde insbesondere von R. Sauer[2]) und F. Schultz-Grunow[3]), das kugel- und zylindersymmetrische Problem neuerdings ebenfalls von F. Schultz-Grunow[4]) behandelt.

In der vorliegenden Abhandlung wird ein weiteres Charakteristikenverfahren für kugel- oder zylindersymmetrische Gaswellen entwickelt, das einem rechnerisch-zeichnerischen Näherungsverfahren zur Konstruktion achsensymmetrischer räumlicher Überschallströmungen[5]) nachgebildet ist. Der Kürze wegen wird das Verfahren hier nur unter den oben angegebenen engen Voraussetzungen und unter Beschränkung auf vollkommene Gase mit konstanten spezifischen Wärmen besprochen. Es läßt sich jedoch leicht nach verschiedenen Richtungen verallgemeinern.

Die rechnerisch-zeichnerischen Näherungsverfahren für die nichtstationäre Gasströmung sind von erheblicher praktischer Bedeutung, da man nur wenige strenge Partikulärlösungen[6]) des Problems kennt und diese Lösungen zur Erfüllung der Randbedingungen bei praktischen Aufgaben selten ausreichen.

2. Potentialgleichung und Charakteristiken.

Die Strömungsgeschwindigkeit u ist eine Funktion der Ortskoordinate x und der Zeitkoordinate t; x bedeutet bei der ebenen Strömung den Abstand eines veränderlichen Querschnitts von einem festen Bezugsquerschnitt, bei der zylinder- oder kugelsymmetrischen Strömung den Abstand von der Zylinderachse bzw. dem Kugelmittelpunkt.

Als Grundgleichungen hat man die Eulersche Bewegungsgleichung

$$u_t + u\,u_x = -\frac{1}{\varrho}\,p_x \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

die Kontinuitätsgleichung

$$\varrho_t + \varrho\,u_x + \varrho_x\,u + \frac{\lambda}{x}\,\varrho\,u = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

und die Adiabatengleichung der vollkommenen Gase

$$p = p(\varrho) = p_0\,(\varrho/\varrho_0)^{\varkappa} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

Hierin ist ϱ die Dichte, p der Druck und $\varkappa$ das Verhältnis c_p/c_v der spezifischen Wärmen. Die Zeiger t, x bedeuten partielle Differentiation, der Zeiger Null bezieht sich stets auf einen festen Bezugszustand. $\lambda = 0$ kennzeichnet das ebene, $\lambda = 1$ das zylindersymmetrische und $\lambda = 2$ das kugelsymmetrische Problem.

Durch den Ansatz

$$\varphi_x = u\,, \qquad \varphi_t = q = -\frac{u^2}{2} - \int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}\,p}{\varrho} = \frac{c_0^2 - c^2}{\varkappa - 1} - \frac{\dot{u}^2}{2} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

[1]) J. Massau: Ene. der math. Wiss. II, 3, 1, S. 162.
[2]) R. Sauer: Ing.-Arch. Bd. 13 (1942), S. 79/89 und Ing.-Arch. Bd. 14 (1943), im Druck.
[3]) F. Schultz-Grunow: Forsch. Ing.-Wes. Bd. 13 (1942), S. 125/134.
[4]) F. Schultz-Grunow: Ing.-Arch. Bd. 14 (1943), im Druck.
[5]) R. Sauer: Theor. Einführung in die Gasdynamik, Berlin 1943, § 21 und Luftf.-Forschg. Bd. 19 (1942), S. 148/152.
[6]) K. Bechert: Ann. Phys. 5, 39 (1941), S. 169/202 und H. Marx: Ann. Phys. 5, 41 (1941), S. 61/88. Eine Lösung von grundsätzlicher Bedeutung gab neuerdings G. Guderley in Luftf.-Forschg. Bd. 19 (1942), S. 302/312.

mit der durch

$$c^2 = \frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,\varrho} = \varkappa\, p/\varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

gegebenen Schallgeschwindigkeit c ergibt sich aus (1) bis (3) bekanntermaßen die Potentialgleichung

$$\boxed{(c^2 - u^2)\,\varphi_{xx} - 2\,u\,\varphi_{xt} - \varphi_{tt} + \frac{\lambda}{x}\,c^2\,u = 0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Nach (4) und (5) ist

$$u = \varphi_x, \qquad c^2 = c_0^2 - \frac{\varkappa - 1}{2}\,\varphi_x^2 - (\varkappa - 1)\,\varphi_t,$$

die Potentialgleichung (6) ist also eine nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Die zu (6) gehörige Charakteristikengleichung

$$(c^2 - u^2)\,\mathrm{d}\,t^2 + 2\,u\,\mathrm{d}\,t\,\mathrm{d}\,x - \mathrm{d}\,x^2 = 0$$

liefert die beiden reellen Charakteristikenscharen

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = u \pm c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

die Potentialgleichung (6) ist also vom hyperbolischen Typus. Da c die Schallgeschwindigkeit relativ zu dem mit der Geschwindigkeit u strömenden Gas bedeutet, sind die Charakteristiken (7) die Wegzeitlinien für die Fortpflanzung infinitesimaler Störungen.

3. Transformation und geometrische Deutung der Potentialgleichung.

Wir ordnen jedem Punkt A des in Frage kommenden Bereichs der x, t-Ebene ein schiefwinkliges ξ, η-Koordinatensystem zu, dessen Achsen in Richtung der Charakteristiken (7) verlaufen (Bild 1). Aus den Transformationsgleichungen

$$x = \xi\cos\alpha + \eta\cos\beta, \quad t = \xi\sin\alpha + \eta\sin\beta, \quad \operatorname{cotg}\alpha = u + c, \quad \operatorname{cotg}\beta = u - c$$

erhält man dann die Differentiationsregeln

$$\frac{\partial}{\partial\,\xi} = \cos\alpha\,\frac{\partial}{\partial\,x} + \sin\alpha\,\frac{\partial}{\partial\,t}, \qquad \frac{\partial}{\partial\,\eta} = \cos\beta\,\frac{\partial}{\partial\,x} + \sin\beta\,\frac{\partial}{\partial\,t},$$

durch deren zweimalige Anwendung

$$\varphi_{\xi\eta} = \varphi_{xx}\cos\alpha\cos\beta + \varphi_{xt}(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) + \varphi_{tt}\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\frac{\varphi_{\xi\eta}}{\sin\alpha\sin\beta} = \varphi_{xx}\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta + \varphi_{xt}(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta) + \varphi_{tt} = \varphi_{xx}(u^2 - c^2) + 2\,u\,\varphi_{xt} + \varphi_{tt}$$

folgt. Hiermit geht die Potentialgleichung (6) über in

$$\boxed{\varphi_{\xi\eta} = \frac{\lambda}{x}\,c^2\,u\sin\alpha\sin\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

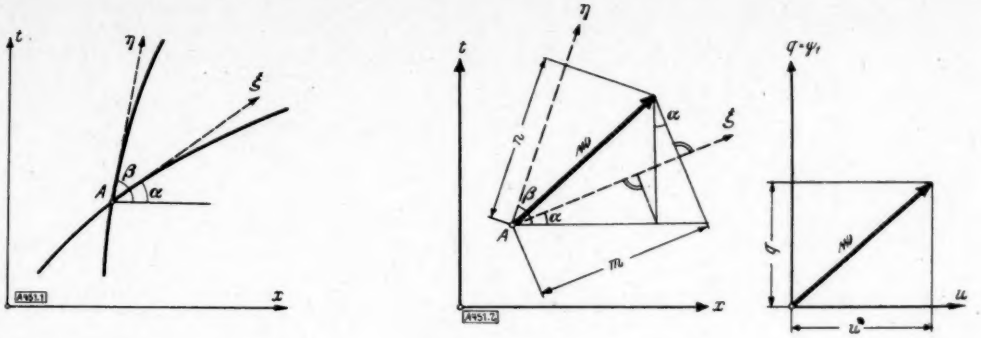
Natürlich gilt gemäß der Herleitung die einfache Beziehung (8) nur in dem betrachteten Punkt A

Zur geometrischen Deutung von (8) untersuchen wir nunmehr die Strömung gleichzeitig in der x, t-Wegzeitebene und in der u, q-Zustandsebene, wobei wir die Komponenten $u = \varphi_x$ und $q = \varphi_t$ zum Zustandsvektor $\mathfrak{w}$ zusammenfassen. Die Projektionen des Zustandsvektors $\mathfrak{w}$ auf die ξ- und η-Achse (Bild 2) sind

$$m = u\cos\alpha + q\sin\alpha = \varphi_\xi, \qquad n = u\cos\beta + q\sin\beta = \varphi_\eta.$$

Die Potentialgleichung (8) ist daher gleichwertig mit den beiden Beziehungen

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{d}\,m &= \frac{\lambda}{x}\,c^2\,u\sin\alpha\sin\beta\,\mathrm{d}\,\eta\\ \mathrm{d}\,n &= \frac{\lambda}{x}\,c^2\,u\sin\alpha\sin\beta\,\mathrm{d}\,\xi\end{aligned}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$



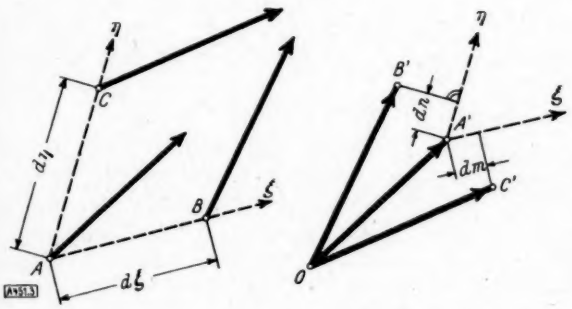


Bild 1 (links oben).
Berührsysteme des Charakteristikennetzes.

Bild 2 (oben).
Projektionen des Zustandsvektors.

Bild 3 (links).
Geometrische Deutung der Potentialgleichung.

die man bei Verzicht auf die hier benützte geometrische Herleitung auch aus den Verträglichkeitsbedingungen der Charakteristikentheorie gewinnen kann.

In (9) ist $\mathrm{d}\,m$ der Zuwachs, den die Projektion m des Zustandsvektors $\mathfrak{w}$ im festen ξ, η-System des Punktes A erfährt beim Übergang zu einem Nachbarpunkt C auf der η-Achse mit der Koordinate $\mathrm{d}\,\eta$ (Bild 3); ebenso bedeutet $\mathrm{d}\,n$ den Zuwachs der Projektion n beim Übergang zu einem Nachbarpunkt B auf der ξ-Achse mit der Koordinate $\mathrm{d}\,\xi$.

4. Vergleich des kugel- und zylindersymmetrischen Problems mit dem ebenen Problem.

Durch $u = u(x, t)$, $q = q(x, t)$ wird die x, t-Wegzeitebene auf die u, q-Zustandsebene abgebildet. Wir setzen voraus, daß diese Abbildung für die in Frage kommenden Bereiche punktweise eineindeutig sei. Dann entspricht dem Kurvennetz der x, t-Charakteristiken der Wegzeitebene in der Zustandsebene ein Kurvennetz von u, q-Charakteristiken; beide Netze sind durch die Gl. (7) und (9) miteinander verknüpft.

Beim ebenen Problem spezialisieren sich nun (8) und (9) mit $\lambda = 0$ zu

$$\varphi_{\xi\eta} = 0; \qquad \mathrm{d}\,m = 0, \qquad \mathrm{d}\,n = 0.$$

Dies besagt, daß hier die Komponente m beim Fortschreiten längs der η-Achse und die Komponente n beim Fortschreiten längs der ξ-Achse ungeändert bleibt, daß also die Linienelemente der x, t- und u, q-Charakteristikennetze paarweise aufeinander senkrecht stehen. Eine nähere Untersuchung[2]) zeigt, daß das u, q-Netz von den Randbedingungen unabhängig ist und daher ein für allemal fest vorliegt. Das x, t-Netz ändert sich mit den Randbedingungen, bleibt aber stets in orthogonal-reziproker Beziehung zu dem festen u, q-Netz und läßt sich auf Grund dieser Beziehung sehr einfach näherungsweise konstruieren.

Beim kugel- und zylindersymmetrischen Problem mit $\lambda = 2$ bzw. $\lambda = 1$ geht die orthogonale Beziehung zwischen den beiden Charakteristikennetzen verloren. Beide Netze sind hier mit den Randbedingungen veränderlich, müssen also jeweils beide konstruiert werden.

5. Näherungskonstruktion der Charakteristikennetze.

Wir ersetzen die beiden Charakteristikennetze durch Streckenzugnetze und haben dann die Aufgabe, ausgehend von den vorliegenden Anfangs- und Randbedingungen die beiden Netze Schritt für Schritt zu konstruieren, indem wir die Differentialgleichungen (9) als Differenzengleichungen umdeuten und in geeigneter Weise auf die Streckenzugnetze anwenden.

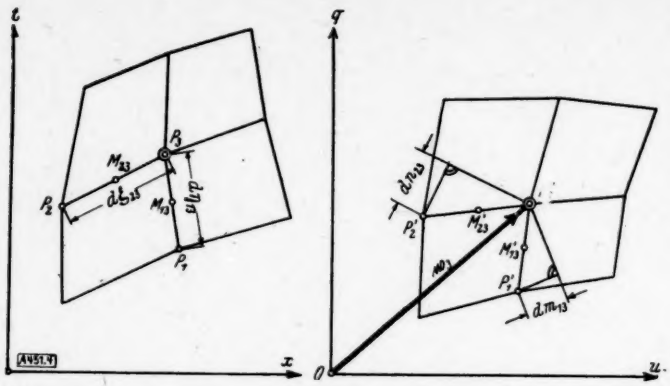


Bild 4. Näherungskonstruktion der Charakteristikennetze.

In den zu konstruierenden Streckenzugnetzen sollen die Knotenpunkte einander zugeordnet sein. Wir bezeichnen die entsprechenden Knotenpunkte mit P_i, P_i' und mit M_{ik}, $M_i'_k$ die Mittelpunkte entsprechender Seiten $P_i P_k$, $P_i' P_k'$ (Bild 4). Ω_{ik} bedeutet den Wert der Funktion

$$\Omega = \frac{\lambda}{x} c^2 u \sin\alpha \sin\beta$$

für das Punktepaar M_{ik}, $M_i'_k$; durch M_{ik} ist x festgelegt, $M_i'_k$ bestimmt u, q und damit gemäß (4) und (7) auch

$$c^2 = c_0^2 - \frac{\varkappa - 1}{2} u^2 - (\varkappa - 1) q \quad \text{und} \quad \operatorname{cotg}\alpha = u + c, \quad \operatorname{cotg}\beta = u - c .$$

Die Zuordnung der beiden Streckenzugnetze wird nun durch folgende Vorschriften definiert:

a) Von den beiden durch einen Punkt $M_i'_k$ des u, q-Netzes festgelegten Winkeln α, β bestimmt der eine die Richtung der entsprechenden Seite $P_i P_k$ des x, t-Netzes von der Länge $\mathrm{d}\xi_{ik}$ bzw. $\mathrm{d}\eta_{ik}$, der andere liefert die Richtung für die Projektion $\mathrm{d}n_{ik}$ bzw. $\mathrm{d}m_{ik}$ der Seite $P_i' P_k'$ des u, q-Netzes.

b) Die Größen $\mathrm{d}\xi_{ik}$, $\mathrm{d}\eta_{ik}$, $\mathrm{d}m_{ik}$, $\mathrm{d}n_{ik}$ und Ω_{ik} sind verknüpft durch die als Differenzengleichungen gedeuteten Beziehungen (9).

Auf Grund dieser Vorschriften lassen sich die beiden Charakteristikennetze im Anschluß an vorgegebene Anfangs- und Randbedingungen schrittweise Knotenpunkt für Knotenpunkt konstruieren. Dabei hat man im wesentlichen immer wieder folgende Aufgabe durchzuführen:

Vorgegeben sind zwei sich entsprechende Punktepaare P_1, P_1'; P_2, P_2', gesucht ist das Nachbarpaar P_3, P_3'. Bei der Lösung dieser Aufgabe geht man zweckmäßig iterativ vor. Zunächst schätzt man den Punkt P_3' und ermittelt hieraus die Größen α_{13}, α_{23}, β_{13}, β_{23}, u_{13}, u_{23}, c_{13}, c_{23}, durch die dann auch der Punkt P_3 und die Längen $\mathrm{d}\xi_{23}$, $\mathrm{d}\eta_{13}$ festliegen. Das Einsetzen von Ω_{13}, Ω_{23}, $\mathrm{d}\xi_{23}$, $\mathrm{d}\eta_{13}$ in (9) liefert die Projektionen $\mathrm{d}n_{23}$, $\mathrm{d}m_{13}$, mittels deren sich ein verbesserter Punkt P_3' konstruieren läßt usw.

Gegenüber dem ebenen Problem[3]) besteht die Mehrarbeit bei dem hier für Kugel- und Zylinderwellen beschriebenen Verfahren einerseits in der zusätzlichen Rechenarbeit für die Ausdrücke Ω_{ik} und andererseits in dem Auftragen der Projektionen $\mathrm{d}m_{ik}$, $\mathrm{d}n_{ik}$. Außerdem verursacht die Iteration einen erhöhten Zeitaufwand, der sich jedoch praktisch als unerheblich erweist, da man gewöhnlich P_3' leicht schätzen kann und daher meist mit dem ersten Iterationsschritt zum Ziel kommt.

6. Zusammenfassung.

Ausgehend von der Potentialgleichung der kugel- oder zylindersymmetrischen nichtstationären isentropischen Gasströmung ohne Reibung und Wärmeleitung wurde ein rechnerisch-zeichnerisches Charakteristikenverfahren entwickelt, durch das sich im Anschluß an vorgegebene Anfangs- und Randbedingungen die Charakteristikennetze in der Wegzeitebene und der Zustandsebene näherungsweise konstruieren lassen. Während beim ebenen Problem das Netz in der Zustandsebene ein für allemal festliegt und nur das Netz in der Wegzeitebene von den Anfangs- und Randbedingungen abhängt, sind beim kugel- und zylindersymmetrischen Problem beide Charakteristikennetze mit den Anfangs- und Randbedingungen veränderlich. Der mathematische Grund für dieses verschiedenartige Verhalten liegt darin, daß nur bei der ebenen Strömung die Potentialgleichung durch eine Legendre-Transformation linearisiert werden kann.

Die Janzen-Rayleighsche zweite Näherung der kompressiblen Strömung um ein beliebiges Profil.

Von *E. Krahn* in Göttingen.

(Aus dem Institut für theoretische Aerodynamik der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen.)

Es wird gezeigt, daß man die Geschwindigkeit der kompressiblen Unterschallströmung an einem Profil in zweiter Näherung nach Janzen-Rayleigh berechnen kann, wenn man die Ableitung der Abbildungsfunktion des Profils auf einen Kreis und die Geschwindigkeitswerte der inkompressiblen Strömung nur an der Profilkontur kennt.

Das Potential φ der kompressiblen ebenen adiabatischen Strömung, das der Gleichung

$$\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=\frac{1}{c^2}\left(\varphi_x^2\varphi_{xx}+2\,\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy}+\varphi_y^2\varphi_{yy}\right) \quad (1)$$

genügt, wo c die Schallgeschwindigkeit ist, kann man nach Janzen und Rayleigh[1]) in eine Reihe nach Potenzen der Machschen Zahl

$$M=\frac{U}{c_\infty}$$

entwickeln, wo U die Anströmgeschwindigkeit und c_∞ die ihr entsprechende Schallgeschwindigkeit ist, und erhält zur Bestimmung der zweiten Näherung φ_1 von φ, wenn man als erste Näherung das Potential φ_0 der inkompressiblen Strömung um dasselbe Profil betrachtet, die Gleichung

$$\varphi_{1xx}+\varphi_{1yy}=\frac{M^2}{U^2}\left(\varphi_{0x}^2\varphi_{0xx}+2\,\varphi_{0x}\varphi_{0y}\varphi_{0xy}+\varphi_{0y}^2\varphi_{0yy}\right) \quad (2),$$

wo die Indices x und y partielle Ableitungen nach den Ortskoordinaten bedeuten.

In der $x\,y$-Ebene sei ein Profil gegeben, das durch die Abbildung

$$z=x+i\,y=f(\zeta)=\zeta+a_0+\frac{a_1}{\zeta}+\frac{a_2}{\zeta^2}+\cdots \quad (3)$$

aus dem Kreise mit dem Radius R um den Nullpunkt der $\zeta=\xi+i\,\eta$-Ebene entstanden zu denken ist. Die Bogenlänge der Profilkontur, gerechnet von einem festen Punkt, z. B. dem hinteren Staupunkt, bezeichnen wir mit s, die Richtung der inneren Normalen mit n.

Die inkompressible Strömung setzen wir als bekannt voraus.

φ_0 genügt dabei folgenden Bedingungen

1. $\Delta\varphi_0=0$ (4),
2. am Profil ist $\varphi_{0n}=0$,
3. im Unendlichfernen ist $\varphi_{0x}=U,\quad \varphi_{0y}=0 \qquad (x^2+y^2\to\infty)$.

Von φ_1 verlangen wir, daß am Profil $\varphi_{1n}=0$ ist und im Unendlichen die Ableitungen von φ_1 verschwinden.

Macht man für φ_1 den Ansatz

$$\varphi_1=\frac{M^2}{U^2}\,\varphi_0^{(1)}\cdot\varphi_0^{(2)} \quad (5),$$

wo $\varphi_0^{(1)}$ und $\varphi_0^{(2)}$ zwei Funktionen sind, die der homogenen Gl. (4) genügen, so hat man einerseits die Gl. (2), andererseits

$$\varphi_{1xx}+\varphi_{1yy}=\frac{M^2}{U^2}\cdot 2\left(\varphi_{0x}^{(1)}\varphi_{0x}^{(2)}+\varphi_{0y}^{(1)}\varphi_{0y}^{(2)}\right) \quad (6).$$

Der Vergleich der rechten Seiten zeigt, daß z. B.

$$\varphi_0^{(1)}=\varphi_{0y} \quad (7),$$

$$\varphi_0^{(2)}=\int_{P_1}^{P_2}\left\{\varphi_{0x}\varphi_{0y}\,dx+\frac{1}{2}\left(\varphi_{0y}^2-\varphi_{0x}^2\right)dy\right\} \quad (8)$$

diesen Bedingungen genügen. Die Integration ist im Außengebiet des Profils längs einer Kurve oder am Profil von einem Punkte P_1 bis zu einem Punkte $P_2(x,y)$ durchzuführen.

[1]) O. Janzen: Phys. Z. Bd. 14 (1913), S. 639; Lord Rayleigh: Phil. Mag. Bd. 32 (1916), S. 1.

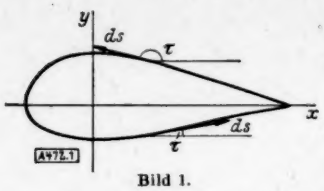


Bild 1.

Uns interessiert die Lösung am Profil, daher betrachten wir weiter nur den Fall, daß P_1 und P_2 auf der Profilkontur liegen und die Integration längs dieser durchgeführt wird.

Wir wollen hier von einer Zirkulation um das Profil absehen; in diesem Falle wird das Integral um das Profil eindeutig. Der Fall mit Zirkulation läßt sich auch behandeln, wie an anderer Stelle ausführlich dargestellt werden soll [2]).

Bezeichnen wir den Winkel zwischen der s- und x-Richtung am Profil mit τ, so läßt sich das Integral (8) für am Profil gelegene Punkte so anschreiben:

$$\varphi_0^{(3)} = \int_0^s \frac{1}{2}(\varphi_{0x}^2 + \varphi_{0y}^2) \sin\tau \, ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

und die Ableitungen in Tangenten- und Normalenrichtung

$$\varphi_{0s}^{(3)} = \frac{1}{2}(\varphi_{0x}^2 + \varphi_{0y}^2) \sin\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

$$\varphi_{0n}^{(3)} = -\frac{1}{2}(\varphi_{0x}^2 + \varphi_{0y}^2) \cos\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Bei der Berechnung der Ableitungen von φ_1 beachten wir die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{0xn} &= \varphi_{0ys} \\ \varphi_{0yn} &= -\varphi_{0xs} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

und können dann schreiben

$$\varphi_{1s} = \frac{M^2}{U^2}\left\{ \varphi_{0y} \cdot \frac{1}{2}(\varphi_{0x}^2 + \varphi_{0y}^2) \sin\tau + \varphi_{0ys} \int_0^s \frac{1}{2}(\varphi_{0x}^2 + \varphi_{0y}^2) \sin\tau \, ds \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (13),$$

$$\varphi_{1n} = \frac{M^2}{U^2}\left\{ -\varphi_{0y} \cdot \frac{1}{2}(\varphi_{0x}^2 + \varphi_{0y}^2) \cos\tau - \varphi_{0xs} \int_0^s \frac{1}{2}(\varphi_{0x}^2 + \varphi_{0y}^2) \sin\tau \, ds) \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Um φ_{1n} am Profil zum Verschwinden zu bringen, addieren wir zu φ_1 eine Lösung der homogenen Gleichung

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Die Summe genügt natürlich wieder der inhomogenen Gl. (2). Die Lösung der Potentialgleichung (15) bestimmen wir, indem wir mit Hilfe der Abbildungsfunktion (3) zum Kreise übergehen, dort die Potentialfunktion bestimmen und dann wieder zum Profil zurückkehren.

Zu dem Zwecke multiplizieren wir (14) mit $|f'(\zeta)|$ und entwickeln das Produkt in eine trigonometrische Reihe nach dem Kreiswinkel Θ. (Den Punkten des Profiles entsprechen die Punkte des Kreises $\zeta = R\, e^{i\Theta}$.)

$$\varphi_{1n} \cdot |f'(\zeta)| = \sum_k{}' \, b_k \sin k\,\Theta + c_k \cos k\,\Theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Das ist eine Radialgeschwindigkeit am Kreise, der eine Tangentialgeschwindigkeit

$$\sum_k{}' - b_k \cos k\,\Theta + c_k \sin k\,\Theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

entspricht. Diese müssen wir jetzt auf das Profil übertragen und haben in der Summe von (13) und dem durch $|f'(\zeta)|$ dividierten Ausdruck (17) die gesuchte Lösung unserer Aufgabe. Bezeichnen wir hier mit φ_1 die den Randbedingungen genügende Lösung von (2), so haben wir

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{1s} = \frac{M^2}{U^2}&\left\{ \varphi_{0y} \cdot \frac{1}{2}(\varphi_{0x}^2 + \varphi_{0y}^2) \sin\tau + \varphi_{0ys} \int_0^s \frac{1}{2}(\varphi_{0x}^2 + \varphi_{0y}^2) \sin\tau \, ds \right\} \\ &+ \sum_k \left\{ -b_k \cos k\,\Theta + c_k \sin k\,\Theta \right\} \cdot \frac{1}{|f'(\zeta)|} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

[2]) Erscheint demnächst in der „Luftfahrtforschung".

Damit ist die gesuchte Lösung der Aufgabe — die II. Näherung der Geschwindigkeit der kompressiblen Strömung am Profil — ausgedrückt durch 1. die von der Profilform abhängige Größe τ, 2. die Ableitung der Abbildungsfunktion $|f'(\zeta)|$, wobei deren Werte nur für die Punkte der Profilkontur erforderlich sind, und 3. die Geschwindigkeit φ_{0s} der inkompressiblen Strömung am Profil, denn die in (13) und (14) vorkommenden Werte φ_{0x} und φ_{0y} sind die Projektionen von φ_{0s} in Richtung der x- und y-Achse, lassen sich also durch φ_{0s}, cos τ und sin τ ausdrücken.

Man sieht, daß die Lösung der inhomogenen Gl. (2) am Rande des vorgegebenen Profils sich auf die Lösung der homogenen Gl. (4) am Rande des Profils zurückführen läßt, ohne daß man die Werte im Außenraum zu kennen braucht. 472

Berechnung der Auslenkung und Spannungen beim Kippen des geschlossenen Kreisringes.

Von *Karl Federhofer* in Graz.

Die bekannten Untersuchungen über die Kippstabilität des Kreisringes beschränken sich auf die Berechnung des für den Eintritt des Kippens maßgebenden kritischen Druckes, sie lassen aber die beim Kippvorgang eintretende Formänderung und damit auch die Spannungen im Ringe unbestimmt. Die vorliegende Arbeit bringt die bisher fehlende Berechnung der größten Auslenkung und der Spannungen des Ringes.

Zur Beurteilung der Kippsicherheit des geschlossenen Kreisringes ist die Kenntnis der Größe jener gleichförmig über den Ringumfang verteilten radialen Drucke notwendig, bei deren Überschreitung das stabile reine Druckgleichgewicht des eben bleibenden Ringes nicht mehr bestehen kann, so daß der Ring aus seiner Ebene kippt und einen Achter bildet. Der für die Instabilität maßgebende kleinste kritische Druck ist bereits bekannt. A. Hencky[1]) berechnete ihn unter der Annahme, daß die Drücke auch nach der Verzerrung zum Kreismittelpunkt gerichtet bleiben, S. Timoshenko[2]) nimmt an, daß die Drücke ihre ursprüngliche Richtung bei der Kippung beibehalten, also lediglich parallel verschoben werden, die Rechnung des Verfassers[3]) fußt auf der Annahme, daß die Drücke nach der eingetretenen Formänderung in den Richtungen der Hauptnormalen der zu einer Raumkurve verzerrten Ringachse wirken. Bezeichnet A die Biegungssteifigkeit des Ringquerschnittes für die in die Ringebene fallende Querschnitts-Hauptachse, a den Ringhalbmesser, so beträgt der kleinste kritische Druck $p_k = \alpha \frac{A}{a^3}$, wo der Beiwert α abhängig ist von der jeweiligen Annahme über die Richtung der Außendrücke nach der Formänderung des Ringes; er ergibt sich in der obigen Reihenfolge dieser Annahmen mit $\frac{12}{\lambda+4}$, $\frac{9}{\lambda+4}$, 3, worin λ das Verhältnis der Biegungssteifigkeit A zur Drillingssteifigkeit C angibt[4]).

Da das Knicken des Ringes in seiner Ebene durch einen kleinsten Außendruck[5]) $\frac{3B}{a^3}$ bewirkt wird, wo B die Biegungssteifigkeit für die zur Ringebene senkrechte Querschnittshauptachse ist, so ist für Ringe, bei denen $A < B$ ist, die Kippgefahr größer als die Gefahr der ebenen Einbeulung. Über die nach Überschreitung des kritischen Außendruckes entstehende Auslenkung des Kreisringes aus seiner Ebene geben die angeführten Untersuchungen keinen Aufschluß; denn zur Berechnung des kritischen Außendruckes genügt es, in den elastischen Grundgleichungen nur die kleinen Glieder erster Ordnung in den Formänderungsgrößen zu berücksichtigen, womit die Grundgleichungen linear und homogen werden. Sie versagen daher bei der Ermittlung der beim Kippvorgange auftretenden Formänderung, die aus diesen vereinfachten Grundgleichungen nur bis auf einen Zahlenfaktor bestimmt ist.

Zweck der folgenden Untersuchung ist die zahlenmäßige Ermittlung der größten Auslenkung des gekippten Kreisringes und die Berechnung der nach Überschreiten der Kippgrenze auftretenden zusätzlichen Spannungen im Ringe. Die Untersuchung wird sowohl für die vorhin angeführte Belastungsannahme von Timoshenko, — die die kleinste Kipplast ergibt — sowie für die Annahme von Hencky, die eine um ein Drittel größere Kipplast liefert, durchgeführt.

[1]) A. Hencky: Z. angew. Math. Mech. Bd. 1 (1921), S. 454.
[2]) S. Timoshenko: Z. angew. Math. Mech. Bd. 3 (1923), S. 358.
[3]) K. Federhofer: Eisenbau Bd. 12 (1921), S. 293.
[4]) Vgl. auch E. L. Nicolai: Z. angew. Math. Mech. Bd. 3 (1923), S. 227.
[5]) J. Boussinesq: Comptes rendus Ac. Sc. Bd. 97 (1883), S. 843.

1. Die Gleichungen des Gleichgewichtes.

Die Zentrallinie des Kreisringes vom Halbmesser a geht beim Kippen in eine Raumkurve über mit den Krümmungskomponenten $\varkappa, \varkappa'$ und der Verwindung τ; für ein Bogenelement ds der deformierten Ringachse gelten mit X, Y, Z als den Teilen der äußeren Belastung je Längeneinheit des Ringumfanges in den Richtungen der Hauptnormalen, Binormalen und Tangente folgende Gleichgewichtsgleichungen[6])

$$\frac{dN}{ds} + T\varkappa' + X = N'\tau \quad (1a), \qquad \frac{dN'}{ds} - T\varkappa + Y = -N\tau \quad (2a),$$

$$\frac{dT}{ds} - N\varkappa' + Z = -N'\varkappa \quad (1b), \qquad \frac{dH}{ds} - G\varkappa' = -G'\varkappa \quad (2b),$$

$$\frac{dG'}{ds} + N = H\varkappa - G\tau \quad (1c), \qquad \frac{dG}{ds} + H\varkappa' - N' = G'\tau \quad (2c).$$

N, N', T bedeuten die Spannkraftkomponenten in den vorhin angegebenen Achsrichtungen, G und G' die Biegungsmomente für die Haupt- und Binormale, H das um die Tangente drehende Drillungsmoment.

Die Spannungsmomente sind mit den Krümmungskomponenten und der Verwindung durch die Gleichungen verknüpft

$$G = A(\varkappa - \varkappa_0), \qquad G' = B(\varkappa' - \varkappa_0'), \qquad H = C(\tau - \tau_0),$$

worin die Werte mit dem Zeiger 0 sich auf den ursprünglichen Zustand des Kreisringes beziehen; daher ist zu setzen

$$\varkappa_0 = 0, \qquad \varkappa_0' = \frac{1}{a}, \qquad \tau_0 = 0$$

und es bleibt

$$G = A\varkappa \quad (3), \qquad G' = B\left(\varkappa' - \frac{1}{a}\right) \quad (4), \qquad H = C\tau \quad (5).$$

Im Ringe herrscht infolge des konstanten Außendruckes von Haus aus eine konstante Ringspannkraft $T_0 = -pa$, so daß die Spannkraft T nach Eintritt des Kippens gesetzt werden kann

$$T = -pa + T_1 \quad (6),$$

wo T_1 den kleinen Zuwachs während des Kippens angibt.

Mit dem Auskippen des Ringes ist eine Störung der Kreisgestalt der Ringmittellinie verbunden, die in erster Näherung durch die unendlich kleine Verschiebung v in der Y-Richtung (Ausweichen aus der Ringebene) und durch die kleine Drehung β der Ringelemente gegen die Ringebene beschrieben wird. Die zu dieser Formänderung gehörigen N', H, G sind klein I. Ordnung, somit sind die in dem Gleichungssatze (1) rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Ausdrücke klein von II. Ordnung, woraus folgt, daß auch die beim Auskippen noch auftretenden Verschiebungen in der Ringebene (u radial, positiv zum Kreismittelpunkte, w in der Kreistangente, positiv mit wachsender Bogenlänge s) klein von II. Ordnung sind. Von der gleichen Größenordnung sind daher auch die mit dieser ebenen Biegung verbundenen Spannkräfte N, T_1 und das Biegungsmoment G', womit aber die im Gleichungssatze (2) rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Ausdrücke als klein III. Ordnung festgestellt sind. Werden diese vernachlässigt, so vereinfacht sich System (2) in das den eingangs erwähnten Arbeiten zugrunde gelegte Gleichungssystem, aus dem in bekannter Weise zwar der für den Eintritt des Kippens maßgebende Außendruck p_k, aber nicht die Größe der Auslenkung berechnet werden kann. Entscheidend für die Bestimmung der Formänderung beim Kippvorgange ist somit die Beibehaltung aller jener Glieder in (2), die in v und β und deren Ableitungen klein von III. Ordnung sind.

2. Die Belastungskomponenten X, Y, Z.

Fall a. Die Radialdrucke p bleiben parallel der Ringebene. Der Punkt P (Bild 1) des Kreises vom Halbmesser $\overline{PO} = a$ ist infolge der Verschiebungen u, w in der Kreisebene nach (P) und infolge der Auslenkung v (senkrecht zur Kreisebene) nach P' gelangt; voraus-

[6]) A. E. H. Love: Lehrbuch der Elastizität. Deutsch von A. Timpe. Leipzig u. Berlin 1907, S. 456.

setzungsgemäß wirkt dann der Außendruck p in P' parallel zu (P) O. Er hat in den Richtungen der Kreistangente und der Kreisnormalen $P\,O$ die Komponenten $p \sin\gamma$ und $p\cos\gamma$, wo $\sin\gamma = \frac{w}{a}$, $\cos\gamma = 1$ (genau einschließlich der Glieder klein III. Ordnung, da u und w bereits klein II. Ordnung sind).

Da sich die Kreistangente beim Übergang von P nach P' in der Ringebene um $\psi = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} + \frac{w}{a}$ und aus der Ringebene heraus um $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$ dreht, und da ferner die $x\,z$-Ebene in P' mit der Ringebene den kleinen Winkel β einschließt, so gibt die Druckkomponente $p\sin\gamma$ in den x, y, z-Richtungen die Teile

$$p\sin\gamma\cdot\sin\psi, \qquad p\sin\gamma\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}, \qquad p\sin\gamma\cdot\cos\psi,$$

während die Druckkomponente $p\cos\gamma$ die Teile

$$p\cos\gamma, \qquad -p\cos\gamma\cdot\sin\beta, \qquad p\cos\gamma\cdot\sin\psi$$

liefert. Damit folgt für die Belastungskomponenten bei Vernachlässigung der Glieder klein von höherer als III. Ordnung

$$X = p \quad . \quad . \quad .

$$X = p\left(1-\frac{v^2}{2a^2}\right) - p\frac{v}{a}\sin\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7\,\mathrm{d}),$$

$$Y = -p\left(1-\frac{v^2}{2a^2}\right)\sin\beta - p\frac{v}{a}\left(1+\frac{u}{a}\right) + p\frac{w}{a}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} \quad \ldots\ldots \quad (7\,\mathrm{e}),$$

$$Z = p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} - p\frac{v}{a}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7\,\mathrm{f}).$$

3. Die Krümmungskomponenten $\varkappa$, $\varkappa'$ und die Verwindung τ.

Um die Differentialgleichungen zur Berechnung der Verschiebungen u, v, w und des Winkels β zu erhalten, müssen die Ausdrücke für $\varkappa$, $\varkappa'$, τ als Funktionen der ersteren entwickelt werden. Für $\varkappa'$ gilt die bekannte Beziehung

$$\varkappa' = \frac{1}{a} + \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8),$$

wobei $\psi = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} + \frac{w}{a}$; da u und w klein II. Ordnung sind und $\varkappa'$ in den Gl. (2) im Produkte mit G und H (klein I. Ordnung) vorkommt, so ist die Beschränkung auf die Glieder klein II. Ordnung in $\varkappa'$ und ψ hinreichend[7]). Hingegen müssen $\varkappa$ und τ bis einschließlich der Glieder klein III. Ordnung in v und β entwickelt werden, da sie im Produkte mit $\frac{1}{a}$ auftreten.

Nehmen wir zunächst v gleich Null und $\beta \neq 0$ an, so bilden die ursprünglich in die Ringebene fallenden Hauptachsen aller Querschnitte den Mantel eines Kreiskegels, dessen Krümmung für die Punkte der Ringmittellinie gleich $\frac{\sin\beta}{a} \sim \frac{1}{a}\left(\beta - \frac{\beta^3}{6}\right)$ ist. Faßt man nun die Auslenkung v als Funktion der Bogenlänge s auf, so ist $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \sin\Phi$ (wo Φ Tangentenwinkel) und die Krümmung ist gleich $-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s}$. Wegen $\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}s^2} = \cos\Phi\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s}$ folgt für die Krümmung in der YZ-Ebene $-\frac{1}{\cos\Phi}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}s^2}$ oder bei Beschränkung auf die Glieder klein III. Ordnung:

$$-\left(1+\frac{1}{2}v^{\mathrm{I}\,2}\right)v^{\mathrm{II}}.$$

Damit ergibt sich

$$\varkappa = \frac{\sin\beta}{a} - \left(1+\frac{1}{2}v^{\mathrm{I}\,2}\right)v^{\mathrm{II}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

(Hochgestellte römische Zahlen bedeuten Ableitungen nach der Bogenlänge s.) Dem Winkel β entspricht ein Drall vom Betrage $\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s}$. Nehmen wir aber β und $\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s}$ gleich Null und für ein Ringelement $v \neq 0$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \mathrm{Const}$ an, so bilden die zum Element gehörigen ursprünglich in die Ringebene fallenden Hauptachsen ein kleines Stück einer Schraubenfläche (Steigungswinkel $\mathrm{tg}\,\alpha = v^{\mathrm{I}}$), deren Windung gleich $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{a}$ ist, wofür bis zur III. Ordnung genau $\frac{1}{a}(1-v^{\mathrm{I}\,2})\,v^{\mathrm{I}}$ gesetzt werden kann.

Somit ergibt sich für die Verwindung

$$\tau = \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s} + \frac{1}{a}(1-v^{\mathrm{I}\,2})\,v^{\mathrm{I}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

Dem Zuwachs T_1 zur Ringspannkraft (Gl. (6)), der klein II. Ordnung ist, entspricht eine zusätzliche Ringdehnung ε vom Betrage $\varepsilon = \frac{T_1}{EF}$ (F Ringquerschnitt), die auch gleich sein muß $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}s} - 1$, wenn $\mathrm{d}s$ und $\mathrm{d}\sigma$ die Längen eines Bogenelementes vor und nach dem Kippen bezeichnen.

Somit ist

$$1 + \frac{T_1}{EF} = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12).$$

[7]) Vgl. die Gl. (15a) und (15b).

Die Richtungskosinusse des Bogenelementes $\mathrm{d}\sigma$ mit den Verschiebungsrichtungen u, v, w betragen

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\sigma}+\frac{w}{a}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\sigma}, \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\sigma}, \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\sigma}+\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\sigma}-\frac{u}{a}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\sigma}.$$

Da die Summe ihrer Quadrate gleich Eins sein muß, so ergibt sich

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}s}\right)^2=\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}+\frac{w}{a}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)^2+\left(1+\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}-\frac{u}{a}\right)^2,$$

oder bis auf kleine Glieder III. Ordnung genau

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}s}\right)^2=1+v^{\mathrm{I}2}+2\left(w^{\mathrm{I}}-\frac{u}{a}\right)$$

und demnach in Verbindung mit (12):

$$v^{\mathrm{I}2}+2\left(w^{\mathrm{I}}-\frac{u}{a}\right)=2\frac{T_1}{EF} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13).$$

Mit $T_1=0$ folgt hieraus als Bedingung für eine dehnungslose Ringachse

$$v^{\mathrm{I}2}+2\left(w^{\mathrm{I}}-\frac{u}{a}\right)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14).$$

Die Benutzung dieser Gleichung, welche die unmittelbare Berechnung von u aus w und v gestattet, vereinfacht die weitere Rechnung erheblich; sie hat zur Folge, daß alle Glieder, die den Faktor $\frac{A}{Fa^2}$ enthalten, gegenüber den davon freien Gliedern vernachlässigt werden, was für dünne Ringe, bei denen der Trägheitshalbmesser $\sqrt{\frac{A}{F}}$ klein gegenüber dem Ringhalbmesser a ist, zu rechtfertigen ist. Mit dieser Vereinfachung wird

$$\psi=\frac{w}{a}+a\,(w^{\mathrm{II}}+v^{\mathrm{I}}v^{\mathrm{II}}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15\mathrm{a})$$

und damit

$$\varkappa'=\frac{1}{a}\,(1+w^{\mathrm{I}})+a\,[w^{\mathrm{III}}+(v^{\mathrm{II}})^2+v^{\mathrm{I}}v^{\mathrm{III}}] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15\mathrm{b}).$$

4. Die Grundgleichung zur Berechnung der Auslenkungen v.

Fall a. Die Grundgleichung für die Auslenkung v ergibt sich aus dem Gleichungssystem (2, a bis c) auf folgende Art: Wir tragen dort für T und Y und $\varkappa'$ die ihnen gemäß Gl. (6), (7b) und (15b) entsprechenden Werte ein und schaffen jene Glieder, die klein von höherer als der I. Ordnung sind, auf die rechten Gleichungsseiten und bezeichnen sie abkürzend mit Γ_1, Γ_2, Γ_3; damit verwandelt sich das System (2) in

$$\frac{\mathrm{d}N'}{\mathrm{d}s}-p\,a\,v^{\mathrm{II}}=\Gamma_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16\mathrm{a}),$$

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}s}-\frac{G}{a}=\Gamma_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16\mathrm{b}),$$

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}s}+\frac{H}{a}-N'=\Gamma_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16\mathrm{c})$$

mit

$$\Gamma_1=-N\left(\beta^{\mathrm{I}}+\frac{1}{a}v^{\mathrm{I}}\right)+T_1\left(\frac{\beta}{a}-v^{\mathrm{II}}\right)-p\left(\frac{w}{a}v^{\mathrm{I}}-\frac{a}{2}v^{\mathrm{I}2}v^{\mathrm{II}}\right) \quad \ldots\ldots \quad (17\mathrm{a}),$$

$$\Gamma_2=-G'\left(\frac{\beta}{a}-v^{\mathrm{II}}\right)+G\,\psi^{\mathrm{I}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17\mathrm{b}),$$

$$\Gamma_3=G'\left(\beta^{\mathrm{I}}+\frac{1}{a}v^{\mathrm{I}}\right)-H\,\psi^{\mathrm{I}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17\mathrm{c}).$$

Ersichtlich sind alle Γ klein von III. Ordnung.

Wird (16c) differenziert und dabei auf (16a und b) Bedacht genommen, so ergibt sich

$$G^{\mathrm{II}}+\frac{1}{a^2}G-p\,a\,v^{\mathrm{II}}=\Gamma_3^{\mathrm{I}}+\Gamma_1-\frac{\Gamma_2}{a}=\Gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18).$$

XUM

Schreiben wir die Gl. (10) und (11) wegen $\sin\beta = \beta - \frac{\beta^3}{6}$ in der Form

$$\varkappa = \left(\frac{\beta}{a} - v^{II}\right) - \gamma_1 \quad \ldots \quad (19),$$

$$\tau = \left(\beta^I + \frac{1}{a} v^I\right) - \gamma_2 \quad \ldots \quad (20),$$

wo

$$\gamma_1 = \frac{\beta^3}{6a} + \frac{1}{2} v^{I2} v^{II} \quad \ldots \quad (21a),$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{a} v^{I3} \quad \ldots \quad (21b),$$

klein III. Ordnung

so folgt aus (19) und (3)

$$\frac{\beta}{a} = \frac{G}{A} + v^{II} + \gamma_1 \quad \ldots \quad (22),$$

und aus (20) und (5)

$$\frac{H}{C} = \beta^I + \frac{1}{a} v^I - \gamma_2,$$

oder wegen (16c)

$$\frac{1}{C}\left(\frac{G}{a} + \Gamma_2\right) = \beta^{II} + \frac{1}{a} v^{II} - \gamma_2^I.$$

Wird hieraus β^{II} mit Hilfe von (22) beseitigt und Gl. (18) beachtet, so ergibt sich für das Biegungsmoment G der Ausdruck

$$\frac{G}{aA}(1+\lambda) = a v^{IV} + \frac{v^{II}}{a}\left(1 + \frac{p a^3}{A}\right) + \left(\frac{a}{A}\Gamma - \frac{1}{C}\Gamma_2 - \gamma_2^I + a\gamma_1^{II}\right) \quad \ldots \quad (23),$$

worin

$$\lambda = \frac{A}{C} \quad \ldots \quad (24).$$

Hiermit führt Gl. (18) zur gesuchten Grundgleichung für die Auslenkung $v(s)$ in der Form

$$a v^{VI} + \frac{1}{a}\left(2 + \frac{p a^3}{A}\right) v^{IV} + \frac{1}{a^3}\left(1 - \lambda\frac{p a^3}{A}\right) v^{II} = \frac{1+\lambda}{aA}\Gamma - \left(\frac{d^2}{ds^2} + \frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{a}{A}\Gamma - \frac{1}{C}\Gamma_2 - \gamma_2^I + a\gamma_1^{II}\right) = \Theta$$

oder mit $ds = a\,d\varphi$:

$$\frac{d^6 v}{d\varphi^6} + \left(2 + \frac{p a^3}{A}\right)\frac{d^4 v}{d\varphi^4} + \left(1 - \lambda\frac{p a^3}{A}\right)\frac{d^2 v}{d\varphi^2} = a^6\Theta = \Omega(\varphi) \quad \ldots \quad (25),$$

worin $\Omega(\varphi)$ klein III. Ordnung in v und deren Ableitungen ist. Vernachlässigt man die kleinen Glieder von höherer als I. Ordnung, das heißt, wird $\Omega(\varphi) = 0$ gesetzt, so vereinfacht sich Gl. (25) in die von S. Timoshenko angegebene Grundgleichung, deren Lösung, da $v(\varphi)$ eine periodische Funktion von φ mit der Periode 2π sein muß, mit

$$v(\varphi) = c \sin m\varphi$$

angesetzt werden kann, wo m eine ganze Zahl ist. Das kleinste m ergibt sich mit $m = 2$ ($m = 1$ kennzeichnet eine Drehung des unverformten Ringes um einen Durchmesser). Wird die Lösung $v(\varphi) = c \sin 2\varphi$ in die durch $\Omega(\varphi) = 0$ homogen gewordene Grundgleichung (25) eingetragen, so ergibt sich daraus der kleinste kritische Druck für den Eintritt des Kippens zu

$$p_k = \frac{9A}{a^3(\lambda+4)} \quad \ldots \quad (26).$$

Die Auslenkung $v(\varphi) = c \sin 2\varphi$ und die Verdrehung β bleiben wegen $\Omega(\varphi) = 0$ unbestimmt. Das Näherungsverfahren zur Ermittlung der Konstanten c wird in (5) entwickelt.

Fall b. Mit Benutzung des in Gl. (7b) angegebenen Wertes für die Belastungskomponente Y und Beachtung der Formeln für T und $\varkappa'$ verwandelt sich das System (2) in

$$\frac{dN'}{ds} - p a v^{II} - p\frac{v}{a} = \Gamma_1 \quad \ldots \quad (27a),$$

$$\frac{dH}{ds} - \frac{G}{a} = \Gamma_2 \quad \ldots \quad (27b),$$

$$\frac{dG}{ds} + \frac{H}{a} - N' = \Gamma_3 \quad \ldots \quad (27c)$$

mit

$$\Gamma_1 = -N\left(\beta^I + \frac{1}{a} v^I\right) + T_1\left(\frac{\beta}{a} - v^{II}\right) - p\left(\frac{w}{a} v^I + \frac{v^2}{2a^2}\beta - \frac{v u}{a^2} - \frac{a}{2} v^{I2} v^{II}\right) \quad \ldots \quad (28).$$

Die Funktionen Γ_2 und Γ_3 bleiben in Übereinstimmung mit den früheren Gl. (17b) und (17c).

An die Stelle der Gl. (18) tritt nun

$$G^{II}+\frac{1}{a^2}G-p\,a\,v^{II}-p\frac{v}{a}=\Gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

Für das Biegungsmoment G findet man nach dem im Falle (a) genauer beschriebenen Vorgange den Ausdruck

$$\frac{G}{a\,A}(1+\lambda)=a\,v^{IV}+\frac{v^{II}}{a}\left(1+\frac{p\,a^3}{A}\right)+\frac{p}{A}v+\left(\frac{a}{A}\Gamma-\frac{1}{C}\Gamma_2-\gamma_2^{I}+a\,\gamma_1^{II}\right),$$

woraus sich in Verbindung mit (29) die gesuchte Grundgleichung für die Auslenkung $v(s)$ in der Form ergibt

$$a\,v^{VI}+\frac{1}{a}\left(2+\frac{p\,a^3}{A}\right)v^{IV}+\frac{1}{a^3}\left[1+(1-\lambda)\frac{p\,a^3}{A}\right]v^{II}-\lambda\frac{p\,a^3}{A}\frac{v}{a^5}$$
$$=\frac{1+\lambda}{a\,A}\Gamma-\left(\frac{d^2}{d\,s^2}+\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{a}{A}\Gamma-\frac{1}{C}\Gamma_2-\gamma_2^{I}+a\,\gamma_1^{II}\right)=\Theta,$$

oder mit $d\,s=a\,d\,\varphi$:

$$\frac{d^6v}{d\,\varphi^6}+\left(2+\frac{p\,a^3}{A}\right)\frac{d^4v}{d\,\varphi^4}+\left[1+(1-\lambda)\frac{p\,a^3}{A}\right]\frac{d^2v}{d\,\varphi^2}-\lambda\frac{p\,a^3}{A}v=a^5\,\Theta=\Omega(\varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30),$$

wo $\Omega(\varphi)$ klein III. Ordnung in v und dessen Ableitungen ist. Mit $\Omega(\varphi)=0$ vereinfacht sich Gl. (30) in die von A. Hencky angegebene homogene Grundgleichung; die Lösung $v(\varphi)=c\sin 2\varphi$ führt hier zur kleinsten Kippbelastung

$$p_k=\frac{12\,A}{a^3(\lambda+4)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

5. Berechnung der Konstanten c in $v(\varphi)=c\sin 2\varphi$.

Fall a. Wir berechnen zunächst die mit der Verschiebung $v=c\sin 2\varphi$ verbundenen Verschiebungen u und w in der Ringebene aus den Gl. (1 a bis c), wobei es genügt, die in den rechten Gleichungsseiten vorkommenden Werte N', $\varkappa$, τ als klein I. Ordnung zu berücksichtigen.

Man erhält aus Gl. (23)

$$\frac{G}{A}=\varkappa=\frac{12\,c}{a^2(\lambda+4)}\sin 2\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32a),$$

hiermit aus Gl. (22)

$$\beta=-4\frac{c}{a}\frac{\lambda+1}{\lambda+4}\sin 2\varphi,$$

aus Gl. (20)

$$\tau=-6\frac{c}{a^2}\frac{\lambda}{\lambda+4}\cos 2\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32b)$$

und schließlich aus (16c) mit $\Gamma_3=0$

$$N'=18\left(\frac{C}{a}\right)\frac{c}{a^2}\frac{\lambda}{\lambda+4}\cos 2\varphi.$$

Damit sind die Ausdrücke

$$a\,N'\tau=f_1,$$
$$-a\,N'\varkappa=f_2,$$
$$a\,(H\varkappa-G\tau)=a\,\varkappa\,\tau\,(C-A)=f_3$$

bestimmt und es gehen die Gl. (1, a bis c) wegen

$$X=p, \qquad Z=p\frac{d\,u}{d\,s}\ \text{(Gl. 7a und c)}, \qquad \varkappa'=\frac{1}{a}\left(1+\frac{d\,\psi}{d\,\varphi}\right)$$

und nach Streichung von $N\frac{d\,\psi}{d\,\varphi}$ als klein IV. Ordnung über in

$$\frac{dN}{d\varphi}+T_1-pa\frac{d\psi}{d\varphi}=f_1 \quad \ldots \quad (33a),$$

$$\frac{dT_1}{d\varphi}-N+p\frac{du}{d\varphi}=f_2 \quad \ldots \quad (33b),$$

$$\frac{dG'}{d\varphi}+Na=f_3 \quad \ldots \quad (33c).$$

Wird aus der ersten und zweiten dieser Gleichungen T_1 beseitigt und in das Eliminationsergebnis der aus der dritten Gleichung berechnete Wert von N eingetragen, wobei wegen Gl. (4) und (8) $G'=\frac{B}{a}\frac{d\psi}{d\varphi}$ zu setzen ist, so kommt

$$\frac{d^4\psi}{d\varphi^4}+\left(1+\frac{pa^3}{B}\right)\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}+\frac{pa^2}{B}\frac{du}{d\varphi}=-\frac{a^2}{B}\left(\frac{df_1}{d\varphi}-f_2-\frac{f_3}{a}-\frac{1}{a}\frac{d^2f_3}{d\varphi^2}\right).$$

Zufolge Gl. (15a) ist aber

$$a\psi=w+\frac{d^2w}{d\varphi^2}-4\left(\frac{c^2}{a}\right)\sin 4\varphi \quad \ldots \quad (34)$$

und gemäß Gl. (14)

$$u=\frac{dw}{d\varphi}+\frac{2c^2}{a}\cos^2 2\varphi \quad \ldots \quad (35),$$

womit sich die folgende Grundgleichung für die tangentielle Verschiebung $w(\varphi)$ ergibt

$$\frac{d^6w}{d\varphi^6}+\left(2+\frac{pa^3}{B}\right)\frac{d^4w}{d\varphi^4}+\left(1+2\frac{pa^3}{B}\right)\frac{d^2w}{d\varphi^2}=60\left(\frac{c^2}{a}\right)\sin 4\varphi\left(16-\frac{pa^3}{B}\right)-\frac{a^3}{B}\left(\frac{df_1}{d\varphi}-f_2-\frac{f_3}{a}-\frac{1}{a}\frac{d^2f_3}{d\varphi^2}\right).$$

Werden mit Hilfe der vorhin berechneten $\varkappa$, τ und N' die Funktionen f_1, f_2, f_3 bestimmt und in vorstehende Gleichung eingetragen, so läßt sich bei Beachtung der Gl. (26) nach längerer Rechnung die Grundgleichung in der Form darstellen

$$\frac{d^6w}{d\varphi^6}+\left(2+\frac{9}{\lambda+4}\frac{A}{B}\right)\frac{d^4w}{d\varphi^4}+\left(1+\frac{18}{\lambda+4}\frac{A}{B}\right)\frac{d^2w}{d\varphi^2}=960\,\varrho\left(\frac{c^2}{a}\right)\sin 4\varphi \quad \ldots \quad (36),$$

worin der dimensionslose Beiwert ϱ durch

$$\varrho=1-\frac{27(\lambda+2)}{20(\lambda+4)^2}\frac{A}{B} \quad \ldots \quad (37)$$

bestimmt ist.

Infolge Berücksichtigung der kleinen Glieder II. Ordnung in den Gl. (1 a bis c) ist in der Grundgleichung (36) eine Störungsfunktion von gleicher Größenordnung (c^2) aufgetreten; ihr entspricht die Lösung

$$w(\varphi)=\nu\sin 4\varphi \quad \ldots \quad (38),$$

wenn ν, wie aus der Eintragung dieses Ansatzes in (36) ersichtlich, den Wert

$$\nu=-\frac{4}{15}\left(\frac{c^2}{a}\right)\cdot\zeta \quad \ldots \quad (39)$$

erhält. Der dimensionslose Beiwert ζ ist nur von den Steifigkeitsverhältnissen $\frac{A}{B}$ und $\lambda=\frac{A}{C}$ abhängig gemäß

$$\zeta=\frac{\varrho}{1-\frac{14}{25(\lambda+4)}\frac{A}{B}} \quad \ldots \quad (40).$$

Mit der tangentialen Verschiebung w sind nach den Gl. (34) und (35) auch die Verdrehung ψ der Kreistangente und die radiale Verschiebung u bestimmt; es ergibt sich hierfür

$$a\psi=4\left(\frac{c^2}{a}\right)(\zeta-1)\sin 4\varphi,$$

$$u(\varphi)=\frac{c^2}{a}\left[1+\left(1-\frac{16}{15}\zeta\right)\cos 4\varphi\right].$$

Aus $G'=\frac{B}{a}\frac{d\psi}{d\varphi}$ folgt für das Biegungsmoment G'

$$G'=16B\left(\frac{c^2}{a^2}\right)(\zeta-1)\cos 4\varphi$$

oder wegen $\zeta - 1 = -\frac{A}{B}\frac{316\,\lambda - 176}{400\,(\lambda+4)^2}$:

$$G' = -A\frac{c^2}{a^3}\frac{316\,\lambda - 176}{25\,(\lambda+4)^2}\cos 4\,\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (41).$$

Hiermit berechnet sich die Schubkraft N aus (33c) zu

$$N = -\frac{4}{25}A\frac{c^2}{a^4}\frac{91\,\lambda + 49}{(\lambda+4)^2}\sin 4\,\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (42).$$

Die Gl. (33a) ermöglicht dann die Berechnung des Zuwachses T_1 zur Ringspannkraft $-p\,a$; er ergibt sich mit

$$T_1 = -\left(\frac{c^2}{a^4}\right)A\frac{54\,\lambda}{(\lambda+4)^2} + \left(\frac{c^2}{a^4}\right)\frac{A}{25\,(\lambda+4)^2}\left[106\,\lambda + 784 - 9\,\frac{A}{B}\frac{316\,\lambda - 176}{\lambda+4}\right]\cos 4\,\varphi \quad \ldots \quad (43).$$

Nachdem nun jene Spannkräfte T_1, N und das Spannungsmoment G', die der mit dem Kippen verbundenen ebenen Biegung des Ringes zugehören, berechnet sind, können die Funktionen Γ_1, Γ_2, Γ_3 aus den Gl. (17 a—c), sodann Γ aus Gl. (18) und schließlich die Störungsfunktion $\Omega(\varphi)$ in Gl. (25) ermittelt werden; nach Durchführung dieser längeren Rechnung, die im Einzelnen nicht wiedergegeben wird und in der in allen Gliedern, die den Druck p enthalten, hierfür genau genug $p = p_k$ (Gl. 26) gesetzt worden ist, entsteht schließlich

$$\Omega(\varphi) = \left(\frac{c^3}{a^2}\right)[\omega_2 \sin 2\,\varphi + \omega_6 \sin 6\,\varphi] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44),$$

worin

$$\omega_2 = \frac{4013 + 1244\,\lambda + 366\,\lambda^2 + 52\,\lambda^3}{(\lambda+4)^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (45a),$$

$$\omega_6 = \frac{139181 + 106195\,\lambda + 8717\,\lambda^2 - 785\,\lambda^3}{(\lambda+4)^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (45b).$$

Die Grundgleichung (25) läßt sich durch den Ansatz

$$v(\varphi) = c\sin 2\,\varphi + c_1 \sin 6\,\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

integrieren. Die Eintragung dieses Ansatzes in (25) und Umformung des Gliedes linker Hand liefert

$$c\left(\frac{p}{p_k} - 1\right)\sin 2\,\varphi - \frac{32\,(38\,\lambda + 143)}{\lambda+4}c_1 \sin 6\,\varphi = \frac{c^3}{36\,a^2}[\omega_2 \sin 2\,\varphi + \omega_6 \sin 6\,\varphi].$$

Durch Gleichsetzen der Koeffizienten von $\sin 2\,\varphi$ ergibt sich für das gesuchte c der Wert

$$c = \frac{6\,a}{\sqrt{\omega_2}}\sqrt{\frac{p}{p_k} - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47).$$

Die weitere Koeffizientenvergleichung führt zur Kenntnis der Verbesserung c_1; man erhält

$$c_1 = -\frac{(\lambda+4)\,\omega_6}{1152\,(38\,\lambda + 143)}\left(\frac{c}{a}\right)^2 \cdot c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48).$$

Für einen schmalen Rechteckquerschnitt $b\,h\,(b > h)$ dessen Breite b mit der Richtung des äußeren Druckes p zusammenfällt, berechnet sich das Steifigkeitsverhältnis λ aus $\lambda = \frac{A}{C} = \frac{E\,J_2}{G\,J}$ wegen $G = \frac{m}{2\,(m+1)}E$ zu $\lambda = \frac{2\,(m+1)}{m}\frac{J_2}{J}$ mit m als Poissonscher Zahl. Da der Drillungswiderstand J für das sehr schmale Rechteck $J = \frac{1}{3}\,b\,h^3$ gesetzt werden kann und das Trägheitsmoment J_2 des Querschnittes für die zu b parallele Hauptachse gleich $\frac{1}{12}\,b\,h^3$ ist, so folgt

$$\lambda = \frac{m+1}{2\,m} \quad \text{oder mit } m = \frac{10}{3}: \quad \underline{\lambda = 0{\cdot}65.}$$

Mit diesem λ findet man

aus Gl. (45a) $\omega_2 = 49{\cdot}6$,
aus Gl. (45b) $\omega_6 = 2105$,
aus Gl. (48) $c_1 = -0{\cdot}05\left(\frac{c}{a}\right)^2 c$

und es lautet daher gemäß (46) die gesuchte Lösung für die Auslenkung $v(\varphi)$

$$v(\varphi) = c\left[\sin 2\,\varphi - 0{\cdot}05\left(\frac{c}{a}\right)^2 \sin 6\,\varphi\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49).$$

Hieraus entnehmen wir schließlich als hinreichende Näherung für das maximale Maß c der Auslenkung beim Kippen des Kreisringes mit schmalem Rechteckquerschnitt[8])

$$v_{max} = \pm c = \frac{6a}{7}\sqrt{\frac{p}{p_k} - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50).$$

Man erkennt, daß die Auslenkung für $p = p_k$ verschwindet und daß bereits kleine Überschreitungen der Kipplast zu großen Auslenkungen v_{max} Anlaß geben. Ist z. B. p nur um 1 v. H. größer als p_k, dann beträgt v_{max} bereits 8,6 v. H. des Ringhalbmessers, bei $p = 1{\cdot}02\, p_k$ ist v_{max} gleich 12 v. H. von a.

Die größte Änderung des Ringhalbmessers a berechnet sich aus

$$u(\varphi) = \frac{c^2}{a}\left[1 + \left(1 - \frac{16}{15}\zeta\right)\cos 4\varphi\right] \quad \text{(Seite 42)}$$

zu $u_{max} = \frac{16}{15}\frac{c^2}{a}$, wobei ζ genau genug gleich 1 gesetzt worden ist. Mit Beachtung des Wertes von c (Gl. 50) folgt endlich

$$u_{max} = 0{\cdot}783\, a\left(\frac{p}{p_k} - 1\right).$$

Hiernach ist, wenn

$$p = 1{\cdot}01\, p_k, \quad u_{max} \sim \frac{1}{10} v_{max},$$

und für

$$p = 1{\cdot}02\, p_k, \quad u_{max} \sim 0{\cdot}13\, v_{max}.$$

Fall b. Mit dem die Grundgleichung (30) unter der Annahme $\Omega(\varphi) = 0$ befriedigenden Ansatz $v(\varphi) = c \sin 2\varphi$ ergeben sich bei Beachtung des in (31) angegebenen ersten kritischen Druckes p_k für $\varkappa, \beta, \tau$ und N' dieselben allgemeinen Ausdrücke wie im Falle a, natürlich hat die Konstante c darin einen anderen noch zu ermittelnden Zahlenwert. Die in 5 (Fall a) eingeführten Funktionen f_1, f_2, f_3 sind im Falle b wegen der geänderten Belastungskomponenten X, Z (Gl. 7d und f) zu ersetzen durch

$$f_1 = +a N' \tau + p\, a\left(\frac{v^2}{2a^2} + \frac{v\beta}{a}\right),$$

$$f_2 = -a N' \varkappa + p \frac{v}{a}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi},$$

$$f_3 = a(H\varkappa - G\tau).$$

Die Gl. (33a—c) bleiben erhalten, die aus ihnen in gleicher Weise wie im Falle a abzuleitende Grundgleichung für die tangentiale Verschiebung w unterscheidet sich von Gl. (36) nur in einigen Beiwerten und lautet

$$\frac{\mathrm{d}^6 w}{\mathrm{d}\varphi^6} + \left(2 + \frac{12}{\lambda+4}\frac{A}{B}\right)\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}\varphi^4} + \left(1 + \frac{24}{\lambda+4}\frac{A}{B}\right)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\varphi^2} = 960\,\varrho\left(\frac{c^2}{a}\right)\sin 4\varphi \quad \ldots\ldots \quad (50),$$

worin der dimensionslose Beiwert ϱ abweichend von (37) durch

$$\varrho = 1 - \frac{A}{B}\frac{115\lambda + 196}{80(\lambda+4)^2}$$

bestimmt ist. Der Gl. (50) entspricht die Lösung

$$w(\varphi) = \nu \sin 4\varphi,$$

wo wie im Falle a: $\nu = -\frac{4}{15}\left(\frac{c^2}{a}\right)\zeta$, während $\zeta = \dfrac{\varrho}{1 - \dfrac{56}{75(\lambda+4)}\dfrac{A}{B}}$; hiermit ist auch die Verdrehung ψ der Kreistangente und mit dieser das Biegungsmoment G' bestimmt, für das sich ergibt

$$G' = -A\frac{c^2}{a^2}\frac{829\lambda - 644}{75(\lambda+4)^2}\cos 4\varphi.$$

[8]) Formal gleiche Ergebnisse gelten beim Kippen eines geraden Stabes (K. Federhofer, Z. angew. Math. Mech. Bd. 6 (1926), S. 43), beim Knicken des Stabes (v. Mises, Z. angew. Math. Mech. Bd. 4 (1924), S. 435) und bei der Einbeulung eines Kreisringes (K. Federhofer, Verhandlg. d. 2. Intern. Kongr. f. Techn. Mechanik, Zürich 1926, S. 388).

Die Gleichgewichtsgleichungen (33c und a) liefern sodann für die Schubkraft

$$N = -\frac{4\,A}{75}\frac{c^2}{a^4}\frac{154\,\lambda+31}{(\lambda+4)^2}\sin 4\,\varphi$$

und für den Zuwachs T_1 der Ringspannkraft $-p\,a$:

$$T_1 = -\left(\frac{c^2}{a^4}\right)A\frac{3\,(25\,\lambda+4)}{(\lambda+4)^2}+\left(\frac{c^2}{a^4}\right)\frac{A}{75\,(\lambda+4)^2}\left[1396-11\,\lambda-12\,\frac{A}{B}\frac{829\,\lambda-644}{\lambda+4}\right]\cos 4\,\varphi\,.$$

Nach Berechnung der Funktionen Γ_1 (Gl. 28a), Γ_2 und Γ_3 (Gl. 17b u. c) gewinnt man schließlich für die Störungsfunktion $\Omega(\varphi)$ der Gl. (30) einen formal mit (44) übereinstimmenden Ausdruck, worin aber die Beiwerte ω_2 und ω_6 (abweichend von 45a, b) bestimmt sind durch

$$\omega_2 = \frac{2534-371\,\lambda+123\,\lambda^2+75\,\lambda^3}{(\lambda+4)^3},$$

$$\omega_6 = \frac{177600+128424\,\lambda+13733\,\lambda^2-671\,\lambda^3}{(\lambda+4)^3}.$$

Die Integration der Grundgleichung (30) mit Hilfe des Ansatzes

$$v(\varphi) = c\sin 2\,\varphi + c_1\sin 6\,\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

liefert nach Koeffizientenvergleichung

$$c = \frac{6\,a}{\sqrt{\omega_2}}\sqrt{\frac{p}{p_k}-1}$$

und

$$c_1 = -\frac{(\lambda+4)\,\omega_6}{3360\,(13\,\lambda+48)}\left(\frac{c}{a}\right)^2 c\,.$$

Für den Kreisring mit schmalem Rechteckquerschnitt folgen daraus wegen $\lambda = 0{\cdot}65$ die Sonderwerte

$$\omega_2 = 23{\cdot}5, \qquad \omega_6 = 2653, \qquad c_1 = -0{\cdot}06\left(\frac{c}{a}\right)^2 c,$$

so daß sich gemäß (51) die Auslenkung $v(\varphi)$ mit

$$v(\varphi) = c\left[\sin 2\,\varphi - 0{\cdot}06\left(\frac{c}{a}\right)^2\sin 6\,\varphi\right]$$

und die größte Auslenkung beim Kippen hinreichend genau mit

$$v_{\max} = \pm\, c \doteq 1{\cdot}2\,a\sqrt{\frac{p}{p_k}-1}\,. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

ergibt.

Die größte Änderung des Ringhalbmessers a berechnet sich aus

$$u_{\max} = \frac{16}{15}\frac{c^2}{a}$$

bei Beachtung des Ergebnisses (52) zu

$$u_{\max} = 1{\cdot}536\,a\left(\frac{p}{p_k}-1\right).$$

6. Berechnung der größten Druckinanspruchnahme des gekippten Ringes.

Nun sollen noch die Größtwerte der Biegungsmomente G, G' nnd der Ringkraft T, die im gekippten Kreisring bei kleiner Überschreitung des kritischen Druckes p_k wirksam sind, zusammengestellt und aus ihnen die größte Druckinanspruchnahme des Ringes berechnet werden.

Fall a. Aus den Gl. (6) und (43) folgt, daß die größte Ringkraft $T_{\max}$ an den Stellen $\varphi = (2\,n+1)\,\frac{\pi}{4}$ $(n = 0, 1, 2, 3)$ auftritt mit dem Betrage

$$T_{\max} = -p\,a - \frac{c^2}{a^4}\frac{A}{25\,(\lambda+4)^2}\left[1350\,\lambda+784-9\left(\frac{h}{b}\right)^2\frac{316\,\lambda-176}{\lambda+4}\right].$$

Setzen wir für den bei Überschreitung des kritischen Druckes p_k wirksamen Außendruck

$$p = \nu\,p_k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (53),$$

worin $\nu > 1$ ist, so läßt sich der Ausdruck für T_{max} bei Beachtung der Gl. (26) und (50) und mit $\lambda = 0{\cdot}65$ vereinfachen in

$$T_{max} = -p\,a\left[1+\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1{\cdot}167-0{\cdot}04\,\frac{h^2}{b^2}\right)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54).$$

An den Stellen der Größtwerte von T erhalten gemäß den Gl. (41) und (32a) auch die Biegungsmomente G' und G ihre Größtwerte, und zwar

$$G'_{max} = A\,\frac{c^2}{a^3}\,\frac{316\,\lambda - 176}{25\,(\lambda+4)^2}, \qquad G_{max} = A\,\frac{c}{a^2}\,\frac{12}{\lambda+4},$$

wofür wir mit Benutzung von (26), (50) und mit $\lambda = 0{\cdot}65$ setzen können

$$G'_{max} = 0{\cdot}02\,p\,a^2\left(1-\frac{1}{\nu}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55),$$

$$G_{max} = \frac{6}{7}\,\frac{p\,a^2}{\nu}\sqrt{\nu-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56).$$

Die größte Druckinanspruchnahme σ_{max} des gekippten Ringes mit Rechteckquerschnitt $b \cdot h$ beträgt daher

$$\sigma_{max} = -\frac{p\,a}{b\cdot h}\left[1+\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1{\cdot}167-0{\cdot}04\,\frac{h^2}{b^2}\right)+0{\cdot}12\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\frac{a}{b}+\frac{5{\cdot}15}{\nu}\sqrt{\nu-1}\,\frac{a}{h}\right] \quad . \quad (57).$$

Nun berechnet sich aber der kritische Druck p_k aus Gl. (26) mit $A = \frac{E}{12}\,b\,h^3$ und $\lambda = 0{\cdot}65$ zu

$$p_k = \frac{b}{6{\cdot}2}\,E\left(\frac{h}{a}\right)^3,$$

woraus für die in Gl. (57) als erster Faktor rechts stehende Beanspruchung des Ringes bei reiner Zusammendrückung

$$\frac{p\,a}{b\,h} = \frac{\nu}{6{\cdot}2}\,E\left(\frac{h}{a}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

folgt. Tragen wir diesen Wert in Gl. (57) ein und bedenken, daß diese nur für kleine Überschreitungen der Kipplast, also für wenig von Eins abweichende Werte $\nu\,(>1)$ und für einen schmalen Rechteckquerschnitt $(h \ll b)$ gültig ist, so kann Gl. (57) ersetzt werden durch die einfachere

$$\sigma_{max} = \frac{1}{6{\cdot}2}\,E\left(\frac{h}{a}\right)\left[5{\cdot}15\,\sqrt{\nu-1}+\nu\left(\frac{h}{a}\right)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59).$$

Diese Formel gilt bis zum Erreichen der Proportionalitätsgrenze σ_p des Ringmaterials und liefert mit $\sigma_{max} = \sigma_P$ für den Größtwert des Verhätnisses $\frac{h}{a}$ hinreichend genau

$$\left(\frac{h}{a}\right)_{max} \approx \frac{1{\cdot}2}{\sqrt{\nu-1}}\,\frac{\sigma_P}{E}.$$

Für Stahl folgt hieraus mit $\sigma_P = 2500\,\frac{kg}{cm^2}$, $E = 2200000\,\frac{kg}{cm^2}$,

$$\left(\frac{h}{a}\right)_{max} = \frac{1}{733\sqrt{\nu-1}},$$

so daß die obere Gültigkeitsgrenze der Formel (59)

für $\nu = 1{\cdot}01$ bei $\left(\frac{h}{a}\right)_{max} = 0{\cdot}014$

für $\nu = 1{\cdot}02$ bei $\left(\frac{h}{a}\right)_{max} = 0{\cdot}010$

liegt. Der Vergleich der Formeln (59) und (58) zeigt, daß das Anwachsen von σ_{max} bei Überschreiten der Kippgrenze außerordentlich rasch erfolgt.

Fall b. Mit den hier gültigen Zwischenergebnissen

$$T_{max} = -p\,a\left[1+\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(2{\cdot}176+0.1\,\frac{h^2}{b^2}\right)\right],$$

$$G'_{max} = 0{\cdot}039\,p\,a^2\left(1-\frac{1}{\nu}\right),$$

$$G_{max} = 1{\cdot}24\,\frac{p\,a^2}{\nu}\sqrt{\nu-1}$$

entsteht für die größte Inanspruchnahme des gekippten Ringes die Formel

$$\sigma_{\max} = -\frac{p}{b}\frac{a}{h}\left[1+\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(2{\cdot}176+0{\cdot}23\,\frac{a}{b}\right)+\frac{7{\cdot}44}{\nu}\,\frac{a}{h}\sqrt{\nu-1}\right],$$

die aus den vorhin angeführten Gründen durch die einfachere

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{4{\cdot}65}\,E\left(\frac{h}{a}\right)\left[7{\cdot}44\sqrt{\nu-1}+\nu\left(\frac{h}{a}\right)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

ersetzt werden kann. Bei Erreichen der Proportionalitätsgrenze $\sigma_P = \sigma_{\max}$ ergibt sich

$$\left(\frac{h}{a}\right)_{\max} \doteq \frac{0{\cdot}625}{\sqrt{\nu-1}}\,\frac{\sigma_P}{E},$$

wonach der Grenzwert $\left(\frac{h}{a}\right)_{\max}$ fast um die Hälfte kleiner ist als im Falle a. 427

Zusammenfassender Bericht.

Die konfluente hypergeometrische Funktion mit besonderer Berücksichtigung ihrer Bedeutung für die Integration der Wellengleichung in den Koordinaten eines Rotationsparaboloides.

Von *Herbert Buchholz* in Berlin.

(Mitteilung aus dem Zentrallaboratorium für Fernmeldetechnik der AEG.)

In dem vorliegenden Bericht werden die wichtigsten Eigenschaften der beiden, gewöhnlich mit $M_{k,m}(z)$ und $W_{k,m}(z)$ bezeichneten konfluenten hypergeometrischen Funktionen besprochen und dabei eine Zusammenstellung der hauptsächlich für sie geltenden Formeln gegeben, um vor allem dem Physiker und dem Ingenieur das Arbeiten mit diesen beiden noch wenig bekannten, physikalisch aber doch recht wichtigen Funktionen zu erleichtern. Im besonderen wird auf ihre Bedeutung für die Integration der Wellengleichung in den Koordinaten eines Rotationsparaboloides hingewiesen. Die im Zusammenhang damit erforderlichen Reihenentwicklungen beider Funktionen bei rein imaginären Werten von k und z werden im Laufe der Arbeit hergeleitet. Bei derartigen Werten von k und z besitzt die Funktion $M_{k,m}(z)$ für ein festes z unendlich viele einfache Nullstellen in bezug auf k. Das aus dieser Eigenschaft ableitbare, einem bestimmten Rotationsparaboloid zugeordnete System von Eigenfunktionen ist orthogonal. Für den Ausdruck $\exp(ikR)/R$ einer fortschreitenden Kugelwelle wird eine Integraldarstellung angegeben. Ein Schrifttumsverzeichnis über die wichtigsten Arbeiten beschließt den Bericht.

1. Der Zugang zur konfluenten hypergeometrischen Funktion von der mathematischen und physikalischen Seite her.

Die gewöhnliche hypergeometrische Funktion von Gauß, die durch die für alle $|x|<1$ absolut konvergente Reihe (1.1a)[1]) definiert ist, stellt bekanntlich die in der Umgebung von

[1]) In der hier gewählten, von Barnes stammenden Bezeichnungsweise der hypergeometrischen Funktion gibt der vordere Zeiger die Zahl der Zählerparameter und der hintere Zeiger die Zahl der Nennerparameter an. Diese zusätzliche Angabe empfiehlt sich immer dann, wenn man es gleichzeitig auch noch mit der verallgemeinerten hypergeometrischen Funktion

$$pFq\,(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_p;\ \beta_1, \beta_2, \cdots \beta_q;\ x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \cdot (\alpha_2)_n \cdots (\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n \cdot (\beta_2)_n \cdots (\beta_q)_n}\,\frac{x^n}{n!}$$

zu tun hat. Von der sie definierenden Reihe gilt allgemein, daß sie in $|x|$ unbeschränkt konvergiert für $p \leqq q$ und nirgends konvergiert für $p \geqq q+2$. Für $p = q+1$ hat sie den Konvergenzradius 1.

$$ {}_2F_1(a_1, a_2; \beta_1; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdot (a_2)_n}{(\beta_1)_n} \cdot \frac{x^n}{n!} \quad \text{mit } (a)_0 = 1 \text{ und } (a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1) \quad (1.1\,a), $$

$$ x \cdot (1-x) \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + [\beta_1 - (a_1 + a_2 + 1)\, x] \cdot \frac{dy}{dx} - a_1 a_2 \cdot y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1.1) $$

$x = 0$ reguläre Partikularlösung der hypergeometrischen Differentialgl. (1.1) dar mit den drei außerwesentlich singulären Stellen $0, \infty$ und 1. Zu ihnen gehören als charakteristische Exponenten für die Stelle $x = 0$ die Werte 0 und $1 - \beta_1$, für die Stelle $x \to \infty$ a_1 und a_2 und für die Stelle 1 0 und $\beta_1 - a_1 - a_2$. Soll die dritte singuläre Stelle nicht bei $x = 1$, sondern bei $z = c$ liegen, so braucht man in den obigen Gleichungen lediglich $x = z/c$ zu setzen. Die charakteristischen Exponenten werden dadurch nicht geändert.

Bei der konfluenten hypergeometrischen Funktion handelt es sich um den Fall, daß die beiden singulären Stellen $z = c$ und $z \to \infty$ der durch die Substitution $x = z/c$ modifizierten Funktion (1.1) „konfluentieren", d. h. zusammenströmen oder verwachsen. Die unmittelbare Durchführung des Grenzüberganges $c \to \infty$ an der Gl. (1.1) würde jedoch die Voraussetzung in sich schließen, daß auch nach der Konfluenz der unendlich ferne Punkt der z-Ebene noch eine außerwesentlich singuläre Stelle mit endlich großen charakteristischen Exponenten a_1 und a_2 bleibt. Die genauere Betrachtung dieser Verhältnisse an Hand der Riemannschen P-Funktion zeigt aber, daß in diesem Falle der unendlich ferne Punkt eine wesentlich singuläre Stelle wird, in dessen Umgebung die Funktion dann nicht mehr eine polare, sondern eine Laurent-Entwicklung besitzt. Das bedeutet aber nichts anderes, als daß bei der Konfluenz von c und ∞ zum mindesten einer der beiden Exponenten a_1 oder a_2 mit c zugleich unendlich groß wird. Setzt man dementsprechend in (1.1) und (1.1a) außer $x = z/c$ auch noch etwa $a_2 = c$ und führt erst darnach den Grenzübergang $c \to \infty$ durch, so entsteht für die konfluente

$$ y_1 = {}_1F_1(a_1; \beta_1; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n}{(\beta_1)_n} \cdot \frac{z^n}{n!} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.2\,a) $$

hypergeometrische Funktion die in z unbeschränkt konvergente Reihenentwicklung (1.2a), und an der aus (1.1) auf diese Weise entstehenden Differentialgl. (1.2) läßt sich ohne Schwierigkeit

$$ z \cdot \frac{d^2 y}{dz^2} + (\beta_1 - z) \cdot \frac{dy}{dz} - a_1 y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.2) $$

zeigen, daß sie durch die Funktion ${}_1F_1(a_1, \beta_1, z)$ tatsächlich befriedigt wird. Es stellt darnach diese Funktion die an der Stelle $z = 0$ reguläre Lösung der Gl. (1 2) dar. Die zweite, für

$$ y_2 = z^{1-\beta_1} \cdot {}_1F_1(a_1 - \beta_1 + 1; 2 - \beta_1; z) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1.2\,b) $$

beliebige Werte von β_1 von der ersten unabhängige Partikularlösung der Gl. (1.2) gibt die Gl. (1.2b) an.

Der weitere Ausbau der Theorie der konfluenten hypergeometrischen Funktion ist nun von Whittaker [3][2]) nicht unmittelbar an die Differentialgl. (1.2) angeschlossen worden, sondern er legte dieser Theorie aus Gründen der größeren Symmetrie, die dadurch die Lösungsintegrale in Abhängigkeit von den Parametern bekommen, die Differentialgl. (1.3)

$$ \frac{d^2 F}{dz^2} + \left\{ -\frac{1}{4} + \frac{\nu}{z} + \frac{1 - p^2}{4 z^2} \right\} \cdot F = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.3) $$

zugrunde. Sie geht aus (1.2) durch die Substitution (1.3a) hervor, so daß zwischen den neuen Parametern p und ν[3]) der Gl. (1.3) und den alten Parametern a_1, β_1 der durch die Gl. (1.3α, β)

$$ y = e^{\frac{z}{2}} \cdot z^{-\frac{1+p}{2}} \cdot F(z) \quad \ldots \quad (1.3\,a) \qquad a_1 = \frac{1+p}{2} - \nu \quad \ldots \quad (1.3\alpha) \qquad \beta_1 = 1 + p \quad \ldots \quad (1.3\beta) $$

beschriebene Zusammenhang besteht. Die grundlegenden Eigenschaften der Differentialgl. (1.2) sind aber durch die Substitution (1.3a) nicht geändert worden: Auch für die Differentialgl. (1.3) ist nach wie vor der Nullpunkt der z-Ebene eine außerwesentliche und der unendlich ferne Punkt eine isolierte wesentliche Singularität. Damit ist auch $F(z)$ eine konfluente hypergeometrische Funktion.

[2]) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Schrifttumsverzeichnis am Schluß des zweiten Teiles dieser Arbeit.

[3]) Für gewöhnlich werden diese Parameter mit k und m bezeichnet, so daß $k = \nu$ und $m = p/2$ ist.

Um zu zeigen, daß diese Art von Funktionen auch für die angewandte Mathematik [5] von großer Bedeutung sind, wollen wir die Partikularlösungen der Wellengleichung in den Koordinaten eines Rotationsparaboloides zu bestimmen suchen. Nun macht es bekanntlich keine Schwierigkeit [1] die Gestalt der Wellengleichung in diesen neuen Koordinaten anzugeben, sobald erst einmal der Zusammenhang zwischen den Koordinaten (x, y, z) eines rechtwinkligen und rechtshändigen Bezugssystems und den krummlinigen und gleichfalls rechtshändigen Koordinaten einer Schar sich rechtwinklig schneidender, konfokaler Rotationsparaboloide gegeben ist. Als ein für unseren Zweck geeignetes paraboloidisches Bezugssystem wählen wir gemäß Bild 1 das System der beiden Scharen orthogonaler Rotationsparaboloide, das in dem zu (x, y, z) gehörenden Zylinderkoordinatensystem der (ϱ, φ, z) durch das Gleichungspaar (1.4a, b) dargestellt wird. Aus ihm

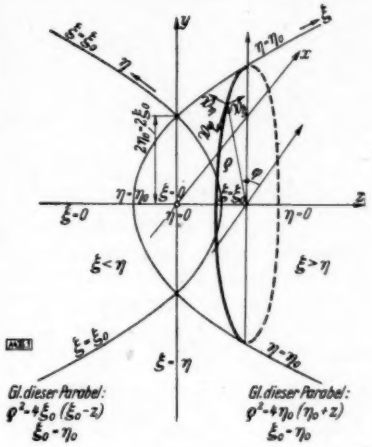


Bild 1.

$$\varrho^2 = 4\,\xi\cdot(\xi - z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.4\,a)$$

$$\varrho^2 = 4\,\eta\cdot(\eta + z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.4\,b)$$

ergibt sich zwischen den Koordinaten x, y, z und ξ, η, φ der folgende Zusammenhang:

$$x = \varrho\cdot\cos\varphi = 2\sqrt{\xi\,\eta}\cdot\cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad (1.4\,\alpha)$$

$$y = \varrho\cdot\sin\varphi = 2\sqrt{\xi\,\eta}\cdot\sin\varphi \quad . \quad . \quad (1.4\,\beta) \qquad z = \xi - \eta \qquad (1.4\,\gamma).$$

Über den Variabilitätsbereich von ξ und η gelte stets, daß $0 \leqq \xi,\ \eta < \infty$ ist. In der rechten Raumhälfte ist dann durchweg $\xi > \eta$ und in der linken $\xi < \eta$. Die Punkte $\xi = \eta$ liegen in der xy-Ebene. Wegen anderer Einzelheiten wird auf das Bild verwiesen. Für die Entfernung R eines Punktes (ϱ, φ, z) vom Ursprung besteht die einfache Gl. (1.4). Schließlich

$$R = (\varrho^2 + z^2)^{1/2} = \xi + \eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.4)$$

berechnen sich noch für die Längen der Bogenelemente $\mathrm{d}s_\xi, \mathrm{d}s_\eta, \mathrm{d}s_\varphi$ auf solchen Kurvenbögen, auf denen sich jeweils nur die Koordinaten ξ, η oder φ allein ändern, die Formeln (1.4c, d, e).

$$\mathrm{d}s_\xi = \left(\frac{\xi+\eta}{\xi}\right)^{1/2}\cdot\mathrm{d}\,\xi \ . \quad (1.4\,c) \qquad \mathrm{d}s_\eta = \left(\frac{\xi+\eta}{\eta}\right)^{1/2}\cdot\mathrm{d}\,\eta \ . \quad (1.4\,d) \qquad \mathrm{d}s_\varphi = 2\cdot(\xi\,\eta)^{1/2}\cdot\mathrm{d}\,\varphi \ . \quad (1.4\,e).$$

Damit sind dann auch die Ausdrücke für die drei Oberflächenelemente und das Volumenelement gegeben. Wir verzichten darauf, sie explizite anzuschreiben, sondern bringen statt dessen sogleich die Beziehung (1.5) für den Differentialoperator Δ, die nach einer bekannten

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{2\,(\xi+\eta)}\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(2\,\xi\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(2\,\eta\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\right) + \frac{\xi+\eta}{2\,\xi\,\eta}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\} \quad . \quad . \quad (1.5)$$

Umrechnungsformel [2] sofort angeschrieben werden kann, sobald erst einmal die drei Bogenelemente bekannt sind.

Bei den weitaus meisten physikalischen Aufgaben wird sich die Abhängigkeit, die die das erregende Feld beschreibende und unter dem Zeichen Δ auftretende Größe von der Koordinate φ zeigt, durch eine Fouriersche Reihe darstellen lassen. Es bedeutet also praktisch keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn von dieser skalaren Größe Φ ein gesetzmäßiger Aufbau gemäß der Gl. (1.6) angenommen wird.

$$\Phi(\xi, \eta, \varphi) = v(\xi, \eta)\cdot\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} p\,\varphi \qquad \text{mit} \qquad p = 0, 1, 2\cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.6).$$

Damit nimmt dann aber die Wellengleichung, der die Funktion $v(\xi, \eta)$ zu genügen hat, die Gestalt von Gl. (1.7) an mit k^2 in cm^{-2} als Wellenzahl.

$$\xi\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2} + \frac{\partial v}{\partial\xi} + \eta\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2} + \frac{\partial v}{\partial\eta} - p^2\cdot\frac{\xi+\eta}{4\,\xi\,\eta}\,v + k^2\,(\xi+\eta)\,v = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.7).$$

Sie ist λ umgekehrt proportional der Wellenlänge mit $k = 2\pi/\lambda$ der erzeugten Schwingung.

Um die Integration der Wellengleichung vorzubereiten, machen wir in bekannter Weise den Ansatz (1.8) in Gestalt eines Produktes aus zwei Faktoren, von denen jeder nur allein von

$$v(\xi, \eta) = f_1(\xi)\cdot f_2(\eta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.8)$$

ξ oder η abhängt. Diese Maßnahme führt bei der Funktion f_1 mit C als einer von ξ und η unabhängigen Konstanten zu der selbstadjungierten Differentialgleichung:

$$\xi \cdot f_1''(\xi) + f_1'(\xi) + \left(k^2 \cdot \xi - \frac{p^2/4}{\xi} - C\right) \cdot f_1(\xi) = 0 .$$

Die ganz entsprechend aufgebaute Differentialgleichung für die Funktion $f_2(\eta)$ enthält lediglich an Stelle der Konstanten C die Konstante $-C$. Wir ersetzen nun in der oben angeschriebenen Gleichung für $f_1(\xi)$ die unabhängige Variable ξ durch die neue unabhängige Veränderliche $u = \pm 2ik \cdot \xi$. Nach Division durch u nimmt damit die Differentialgleichung für $f_1(u)$ die Form an:

$$f_1''(u) + \frac{f_1'(u)}{u} - \left\{\frac{1}{4} + \frac{C}{(\pm 2ik)} \cdot \frac{1}{u} + \frac{p^2/4}{u^2}\right\} \cdot f_1(u) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.8a).$$

Für $f_2(v)$ gilt dann mit v an Stelle von u genau dieselbe Gleichung, wenn statt der Variablen η die Variable $v = \mp 2ik \cdot \eta$ benutzt wird. Wir haben es demnach in beiden Fällen mit einer und derselben Differentialgleichung zu tun. Um sie auf die geeignetste Form zu bringen, führen wir noch zwei weitere Substitutionen durch. Die erste betrifft lediglich den Ersatz der von ξ und η unabhängigen Konstanten C durch die gleichfalls von ξ und η unabhängige Konstante ν gemäß der Gl. (1.9). Die zweite ersetzt die Funktion $f(u)$ durch die

$$C/(\pm 2ik) = \nu \quad . \quad . \quad . \quad (1.9) \qquad\qquad f_{1,2}(u) = u^{-1/2} \cdot F_{1,2}(u) \quad . \quad . \quad . \quad (1.10)$$

Funktion $F(u)$ von Gl. (1.10) und stellt damit für die beiden Komponenten $f_1(\xi)$ und $f_2(\eta)$

$$\frac{d^2F(z)}{dz^2} + \left\{-\frac{1}{4} + \frac{\nu}{z} + \frac{(1-p^2)/4}{z^2}\right\} \cdot F(z) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.11)$$

$$F(z) \equiv F_1(u) = F_1(\pm 2ik \cdot \xi) \quad . \quad . \quad (1.11a) \qquad F(z) \equiv F_2(v) = F_2(\mp 2ik \cdot \eta) \quad . \quad . \quad (1.11b)$$

der Wellenfunktion (1.8) den Zusammenhang mit der durch die Differentialgleichung (1.11) definierten Funktion $F(z)$ her.

Mit der Gl. (1.11) sind wir damit auch von der physikalischen Seite her an die konfluente hypergeometrische Funktion herangeführt worden. Die beiden voneinander unabhängigen Partikularlösungen dieser Gleichung, von deren Lösungseigenschaften sogleich zu sprechen sein wird, pflegt man durch die Funktionszeichen

$$M_{\nu, p/2}(z) \qquad \text{und} \qquad W_{\nu, p/2}(z)$$

wiederzugeben. Demgemäß werden wir die entsprechenden beiden unabhängigen Partikularintegrale der Gl. (1.8a) durch die Gl. (1.12a, b) definieren

$$m_\nu^{(p)}(z) = (\pi/2z)^{1/2} \cdot M_{\nu, p/2}(z) \quad . \quad . \quad (1.12a) \qquad w_\nu^{(p)}(z) = (\pi/2z)^{1/2} \cdot W_{\nu, p/2}(z) \quad . \quad . \quad (1.12b)$$

Zwei mögliche Systeme unabhängiger Partikularlösungen der Wellengleichung (1.7) werden dann z. B. durch die Gl. (1.13a, b) beschrieben, in denen entweder die oberen oder die unteren

$$v_\nu^{(p)}(\xi, \eta) = m_\nu^{(p)}(\pm 2ik \cdot \xi) \cdot m_\nu^{(p)}(\mp 2ik \cdot \eta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.13a)$$

$$v_\nu^{(p)}(\xi, \eta) = m_\nu^{(p)}(\pm 2ik \cdot \xi) \cdot w_\nu^{(p)}(\mp 2ik \cdot \eta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.13b)$$

Vorzeichen zusammengehören. Der Zeiger ν darf in der Gleichung ohne Gefärdung ihrer Eigenschaft als Partikularlösung jeden beliebigen reellen oder komplexen Wert annehmen. Selbstverständlich können in der Gl. (1.13) die Argumente ξ und η auch ihre Stellungen vertauschen.

Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen soll zunächst die ausführlichere Erörterung der verschiedenen Partikularlösungen der Gl. (1.11) erfolgen. Im Hinblick auf die bereits vorhandene Literatur [3] werden wir uns dabei im allgemeinen sehr kurz fassen können. Da jedoch die bisherigen Untersuchungen über diese Funktionen kaum jemals auf eine Nutzanwendung bei der Lösung physikalisch-technischer Aufgaben abgezielt haben, so sind hier noch eine Reihe von Bemerkungen nachzutragen, um das Auffinden eines geeigneten Lösungsansatzes zu erleichtern oder um es durch die Herstellung einer nach dem Produkt zweier Wellenfunktionen fortschreitenden Reihe für die physikalisch so bedeutsame Dipolstrahlung überhaupt erst zu ermöglichen. Außerdem wird die bisher noch gar nicht behandelte Frage nach den Nullstellen der Funktion $m_\nu^{(p)}(z)$ bei rein imaginären Werten von ν und z behandelt werden. Diese Nullstellen bestimmen nämlich die Eigenwerte und Eigenfunktionen, die maßgebend sind für die Gestaltung der einzelnen im Innern eines hohlen Rotationsparaboloides möglichen, freien Teilwellen. Um die Wellenfunktionen für solche Werte von ν und z auch der erforderlichen numerischen Berechnung zugänglich zu machen, werden im Laufe der Arbeit auch die dazu notwendigen Reihenentwicklungen aufgestellt.

2. Die verschiedenen Partikularlösungen der Differentialgleichung (1.11).

Für die weiteren Betrachtungen wird es sich als sehr nützlich erweisen, neben der mit der grundlegenden Gl. (1.11) identischen Differentialgleichung (2.1) auch noch über die be-

$$F''(z)+\left\{-\frac{1}{4}+\frac{\nu}{z}+\frac{1-p^2}{4z^2}\right\}\cdot F(z)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.1)$$

sonderen Varianten dieser Gleichung zu verfügen, die aus ihr durch verschiedene Änderungen in den Variablen entstehen. Die meisten der auf diese Weise abgeänderten Gleichungs-

$$y=e^{\alpha z}\cdot z^{\beta}\cdot F(A\cdot z^{\gamma}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.1a),$$

formen ergeben sich durch Spezialisierung der Werte von α, β und γ in der Definitionsgleichung für die Funktion y von Gl. (2.1a), die die Differentialgleichung (2.1b) erfüllt.

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2y}{dz^2}-\left[2\alpha+\frac{2\beta+\gamma-1}{z}\right]\cdot\frac{dy}{dz}+\Bigg\{\alpha^2+\frac{2\alpha\beta+\alpha(\gamma-1)}{z}+\frac{\beta(\beta+1)+\beta(\gamma-1)}{z^2}\\ +(\gamma\cdot z^{\gamma-1})^2\cdot\left[-\frac{A^2}{4}+\frac{\nu A}{z}+\frac{1-p^2}{4z^2\gamma}\right]\Bigg\}\cdot y=0\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (2.1b).$$

Für die am Ausgange unserer Betrachtungen stehende Differentialgleichung (2.1) ist bei beliebigen Werten von p, ν und z, wie man durch Einsetzen leicht erkennt, eine erste Gruppe von zwei voneinander unabhängigen Partikularlösungen durch das Gleichungspaar (2.2a, b)

$$M_{\nu,p/2}(z)=z^{\frac{1+p}{2}}\cdot e^{-z/2}\cdot {}_1F_1\left(\frac{1+p}{2}-\nu;\ 1+p;\ z\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.2a)$$

$$M_{\nu,-p/2}(z)=z^{\frac{1-p}{2}}\cdot e^{-z/2}\cdot {}_1F_1\left(\frac{1-p}{2}-\nu;\ 1-p;\ z\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.2b)$$

gegeben. In der Tat geht aus der Differentialgleichung selbst hervor, da sie p nur im Quadrat enthält, daß, wenn $M_{\nu,p/2}(z)$ eine Lösung ist, dies auch gewiß von $M_{\nu,-p/2}(z)$ zutrifft. Für $\Re e\, p>-1$ verschwindet mit $z=0$ die erste der beiden Lösungen und für die zweite gilt das für $\Re e\, p<+1$. Da für $p=0$ die beiden Lösungen überhaupt miteinander identisch werden, so stellt demnach das obige Gleichungspaar für alle nichtnegativ ganzzahligen Werte von p in Wirklichkeit nur eine einzige Lösung mit der Eigenschaft dar, für einen verschwindenden Wert von z endlich zu bleiben.

Die Funktion ${}_1F_1$ in (2.2a) erfüllt nun, wie wir schon wissen, die Differentialgleichung (2.1b) für ein $\alpha=+1/2$, $\gamma=1$ und $\beta=-(1+p)/2$. Ersetzt man in dieser Gleichung z und ν durch $-z$ und $-\nu$, so entsteht dieselbe Differentialgleichung mit $\alpha=-1/2$. An Hand der Substitutionsgleichung geht daraus hervor, daß sich die beiden Definitionsgleichungen (2.2a, b) für die Funktion $M_{\nu,p/2}(z)$ auch in der Form der Gl. (2.3a, b) schreiben lassen müssen.

$$M_{\nu,p/2}(z)=z^{\frac{1+p}{2}}\cdot e^{+z/2}\cdot {}_1F_1\left(\frac{1+p}{2}+\nu;\ 1+p;\ -z\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.3a)$$

$$M_{\nu,-p/2}(z)=z^{\frac{1-p}{2}}\cdot e^{+z/2}\cdot {}_1F_1\left(\frac{1-p}{2}+\nu;\ 1-p;\ -z\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.3b).$$

Da die beiden Gleichungspaare (2.2) und (2.3) durch bloßen Vorzeichenwechsel von ν und z ineinander übergehen, so muß demnach für die Funktion $M_{\nu,p/2}(z)$ die Relation (2.4a) oder (2.4b) bestehen.

$$M_{\nu,p/2}(z\cdot e^{\pm\pi i})=e^{\pm(p+1)\cdot\pi i/2}\cdot M_{-\nu,p/2}(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.4a)$$

$$M_{-\nu,p/2}(z\cdot e^{\pm\pi i})=e^{\pm(p+1)\pi i/2}\cdot M_{+\nu,p/2}(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.4b).$$

Nach der Definitionsgleichung (2.2a, b) ist diese Funktion, von der multiplikativen Verzweigung infolge des Faktors $z^{(1+p)/2}$ abgesehen, ganz und transzendent in z. Nur in dem besonderen Falle, wo $\nu=n+(p+1)/2$ und n nichtnegativ ganzzahlig ist, nimmt ihr letzter Faktor den Charakter eines Polynoms an. Man bezeichnet diese Polynome nach Laguerre und definiert sie in ihrem Zusammenhang mit der M-Funktion durch die Gl. (2.4).

$$\left.\begin{aligned}L_n^{(p)}(z)=\frac{\Gamma(n+p+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(p+1)}\cdot z^{-\frac{p+1}{2}}\cdot e^{z/2}\cdot M_{n+\frac{p+1}{2},\,\frac{p}{2}}(z)=\\ \frac{\Gamma(n+p+1)}{\Gamma(p+1)\,\Gamma(n+1)}\cdot {}_1F_1(-n;\ 1+p;\ z)\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (2.4).$$

Außer den Funktionen $M_{\nu,p/2}(z)$ hat Whittaker noch eine zweite Gruppe von zwei voneinander unabhängigen Partikularlösungen in die Theorie der Differentialgleichung (2.1) eingeführt. Da für einen beliebigen Wert von p die durch die Gl. (2.2) definierten Funktionen bereits ein vollständiges Lösungssystem von (2.1) darstellen, so muß sich auf Grund der allgemeinen Theorie jede weitere Partikularlösung von (2.1) linear und homogen durch die bereits bekannten beiden ersten ausdrücken lassen. Das ist nach den beiden Definitionsgl.

$$W_{\nu,p/2}(z)=\frac{\Gamma(-p)}{\Gamma\left(\frac{1-p}{2}-\nu\right)}\cdot M_{\nu,p/2}(z)+\frac{\Gamma(+p)}{\Gamma\left(\frac{1+p}{2}-\nu\right)}\cdot M_{\nu,-p/2}(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.5\text{a})$$

$$p\neq 0,\ 1,\ 2\ \ldots\ \ |\arc(\pm z)|<3\pi/2$$

$$W_{-\nu,p/2}(-z)=\frac{\Gamma(-p)}{\Gamma\left(\frac{1-p}{2}+\nu\right)}\cdot M_{-\nu,p/2}(-z)+\frac{\Gamma(+p)}{\Gamma\left(\frac{1+p}{2}+\nu\right)}\cdot M_{-\nu,p/2}(-z) \quad . \quad . \quad . \quad (2.5\text{b})$$

(2.5a, b) auch in der Tat der Fall. Gegenüber den beiden M-Funktionen haben die soeben eingeführten Funktionen W vor allem den Vorzug der größeren Allgemeingültigkeit. Zwar scheinen auch sie zunächst dem Sonderfall eines nichtnegativ ganzzahligen Wertes von p nicht gerecht zu werden. Die genauere Betrachtung zeigt aber, daß ihre Definition nach den obigen Gleichungen in diesem Falle wenigstens im Sinne einer Grenzwertgleichung richtig bleibt, denn für ein $p\to 2$ z. B. wird zwar das erste Glied in (2.5a) unendlich groß. Dasselbe gilt aber nach Gl. (2.2b) wegen des Nennerparameters $1-p$ auch für das zweite Glied. Es stellt sich also für solche Werte von p die obige Lösung der Differentialgleichung (2.1) in der unbestimmten Form $\infty-\infty$ dar, und man kann, wenn man es wünscht, von hier aus lediglich mit Hilfe der einfachen, für solche Fälle gültigen Regel sogar bis zu dem expliziten Ausdruck für $W_{\nu,p/2}$ vorstoßen.

Um die Vorstellung zu festigen, geben wir diesen Ausdruck nachstehend in Gl. (2.6) wieder. Er gilt für jedes $p=0,\ 1,\ 2\cdots$. Für ein $p=0$ fällt dabei in (2.6) die erste, endliche

$$W_{\nu,p/2}(z)=\frac{e^{-z/2}}{\Gamma\left(\frac{1-p}{2}-\nu\right)\Gamma\left(\frac{1+p}{2}-\nu\right)}\cdot\left\{\begin{array}{l} z^{-\frac{p-1}{2}}\cdot\displaystyle\sum_{\lambda=0}^{p-1}\frac{\Gamma(p-\lambda)\,\Gamma\left(\frac{1-p}{2}-\nu+\lambda\right)}{\lambda!}\cdot(-z)^{\lambda} \\ +(-)^{p}\,z^{\frac{1+p}{2}}\cdot\displaystyle\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+\lambda-\nu\right)}{\lambda!\,(p+\lambda)!}z^{\lambda}\cdot\left[\Psi(1+\lambda)+\Psi(1+\lambda+p)-\Psi\left(\frac{1+p}{2}+\lambda-\nu\right)-\ln z\right] \end{array}\right\} \quad (2.6)$$

$|\arc z|<3\pi/2,\ p=0,\ 1,\ 2\cdots$, absolut und unbeschränkt konvergent.

Summe ganz heraus. Bequemer läßt sich die Beziehung (2.6) aus der Integraldarstellung der W-Funktion nach Barnes gewinnen. Als charakteristisch ist demnach für diese Funktion bei ganzzahligen Werten von p das Auftreten eines logarithmenbehafteten Gliedes anzusehen. Auch das entspricht durchaus der allgemeinen Lösungstheorie.

Die einzige Ausnahme von dieser Regel bildet allein der Fall eines $\nu=n+(p+1)/2$ mit nichtnegativ ganzzahligen Werten von n. Bei Annäherung von ν an diesen Wert gehen zwar die beiden Gammafunktionen vor der geschweiften Klammer gegen unendlich. Das gleiche trifft aber auch zu von der Gamma- und Psi-Funktion in der zweiten Summe mit dem Argument $(p+1)/2+\lambda-\nu$, wenigstens solange als λ kleiner ist als $n+1$. Die Funktion $W_{\nu,p/2}$ entartet daher unter dieser Voraussetzung in ein Polynom n-ten Grades, und wir werden noch sehen, daß es sich auch hier um das Laguerre-Polynom von Gl. (2.4) handelt. Der symmetrische Aufbau der beiden Gl. (2.5a, b) zeigt im übrigen, daß für alle Werte von z, ν und p stets die Beziehung (2.7) besteht. Kommt p auch in ν vor, so darf dieses p den Vorzeichenwechsel natürlich nicht mitmachen.

$$W_{+\nu,+p/2}(z)=W_{+\nu,-p/2}(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.7)$$

Da für ein $p=0,\ 1,\ 2\ \ldots$ jede der beiden Funktionen W in der Nachbarschaft von $z=0$ die Eigenschaften beider M-Funktionen auf sich vereinigt und für ein $p=0,\ 1,\ 2\ \ldots$ zum mindesten ein Glied mit $\ln(z)$ auftritt, so besitzt die zuletzt eingeführte Gruppe der Partikularlösungen für $p\neq 0,\ 1$ oder $\nu\neq n+(p+1)/2$ die Eigenschaft, für $z\to 0$ über alle Grenzen zu wachsen. Davon abgesehen stellt sie aber für jedes p ein in sich selbst vollständiges Lösungssystem dar, da sich die beiden Funktionen (2.5a) und (2.5b) in der Nähe von $z=0$ oder $z\to\infty$ ganz verschiedenartig verhalten. Neben der Gl. (1.13) gibt daher auch

$$v_{\nu}^{(p)}(\xi,\eta)=w_{-\nu}^{(p)}(\mp 2ik\cdot\xi)\cdot w_{+\nu}^{(p)}(\mp 2ik\cdot\eta) \qquad (\nu \text{ beliebig}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.8)$$

noch die durch Gl. (2.8) wiedergegebene Kombination von Wellenfunktionen eine mögliche Lösung der Wellengleichung an, in der wiederum die gleichgestellten Vorzeichen zusammengehören.

Nach der allgemeinen Lösungstheorie muß es natürlich außer den beiden Beziehungen (2.5a, b), die die Funktionen der zweiten Lösungsgruppe durch die der ersten darstellen, auch noch eine Beziehung geben, die das Umgekehrte leistet. Diese Relation kann rein formal aus den angegebenen beiden Gleichungen dadurch gewonnen werden, daß man in (2.5b) die M-Funktionen mit dem Argument $-z$ mittels der Gl. (2.4b) durch M-Funktionen mit dem Argument $+z$ ersetzt und sodann das neu entstandene Gleichungspaar nach einer der beiden M-Funktionen auflöst. Auf diese Weise entsteht die sehr wichtige Beziehung[4]) (2.9).

$$\left.\begin{aligned} M_{\nu,\,p/2}(z) = {} & \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}-\nu\right)} \cdot e^{+\pi i \nu} \cdot W_{-\nu,\,p/2}(z \cdot e^{+\pi i}) + \\ & + \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+\nu\right)} \cdot e^{+\pi i\left(\nu-\frac{p+1}{2}\right)} \cdot W_{\nu,\,p/2}(z) \end{aligned} \quad \left(-3\pi/2 < \arg z < +\frac{\pi}{2}\right) \right\} \quad . \quad . \quad (2.9).$$

Ist darin entgegen der besonders angeführten Voraussetzung der Bereich von arc z auf das Intervall $-\pi/2 < \arg z < +3\pi/2$ beschränkt, so ist in (2.9) das Vorzeichen von i im Exponenten der drei e-Funktionen von $+$ in $-$ umzuwandeln.

3. Die allgemeinen Integraldarstellungen für die Funktion $M_{\nu,\,p/2}(z)$.

Den bequemsten Zugang zu der ersten und ältesten Form der Integraldarstellungen für die beiden hier in Rede stehenden Funktionen M und W, die im wesentlichen von Whittaker selbst stammt, gewährt die bekannte Methode von Laplace. Ihre Anwendung auf die Lösung der Differentialgleichung (2.1) bietet zugleich die einfachste Möglichkeit, den inneren Zusammenhang und die gemeinsame Wurzel dieser beiden Funktionen bloßzulegen. Geht man gemäß der Vorschrift dieser Methode mit dem Ansatz (3.1) in die Differential-

$$y = \text{Const} \cdot \int_A^B e^{-vz} \cdot v^{\frac{p-1}{2}+\nu} \cdot (v-1)^{\frac{p-1}{2}-\nu} \cdot \mathrm{d}v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3.1)$$

gleichung (2.1b) für die besonderen Werte $\alpha = 1/2$, $\beta = (1+p)/2$ und $\gamma = A = 1$ ein, so zeigt eine einfache mit einer partiellen Integration verknüpfte Rechnung, daß der gewählte Ansatz tatsächlich das Gewünschte leistet, falls in den beiden Endpunkten des Integrationsweges der v-Ebene für den Ausdruck

$$e^{-zv} \cdot v^{\frac{p+1}{2}+\nu} \cdot (v-1)^{\frac{p+1}{2}-\nu}$$

die Differenz der dort herrschenden Werte verschwindet. Dabei ist es bekanntlich gleichgültig, ob dieses Verschwinden eintritt, weil die beiden Glieder der Differenz einander gleich werden oder weil jedes Glied für sich zu Null wird.

Der allgemeinsten dieser Bedingung entsprechenden Lösung, bei der das Verschwinden der Differenz aus dem zuerst genannten Grunde erfolgt, läßt sich durch eine geeignete Verfügung über die willkürlich wählbare Konstante die Gestalt von Gl. (3.2) geben. Das darin

$$\left.\begin{aligned} M_{\nu,\,p/2}(z) = {} & \frac{\Gamma(p+1)}{(2\pi i)^2} \cdot \Gamma\left(\frac{1-p}{2}-\nu\right)\Gamma\left(\frac{1-p}{2}+\nu\right) \cdot z^{\frac{p+1}{2}} \cdot e^{z/2-\pi i\left(\frac{p-1}{2}+\nu\right)} \\ & \int_{v_A}^{(1+,\,0+,\,1-,\,0-)} e^{-vz} \cdot v^{\frac{p-1}{2}+\nu} \cdot (v-1)^{\frac{p-1}{2}-\nu} \cdot \mathrm{d}v \quad 0 < v_A < 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

vorkommende Integral hat, um eine Beschränkung der für die Parameter ν und p zulässigen Werte möglichst weitgehend zu vermeiden, als Integrationsweg eine Doppelschleife, auf der im Falle der Gl. (3.2) zu Beginn des Weges zwischen den Punkten 0 und 1 $\arg v = 0$ und $\arg(v-1) = -\pi$ zu setzen ist. Mit Ausnahme der negativ ganzzahligen Werte für p dürfen sonst in der Tat ν und p in (3.2) jeden beliebigen reellen oder komplexen Wert haben. Für geeignete Werte von ν und p kann das Doppelschleifenintegral (3.2) auch als ein nur den

[4]) In dem bekannten Buch von Whittaker-Watson [3] ist in der Angabe dieser Beziehung ein Druckfehler unterlaufen. Vornehmlich aus diesem Grunde wird der Herleitung der richtigen Beziehung aus den Integraldarstellungen im Abschnitt 4 ein breiterer Raum gewidmet, als es sonst nötig wäre.

Punkt 0 oder den Punkt $+1$ umlaufendes, einfaches Schleifenintegral geschrieben werden. Ist z. B. $\Re e\,(\nu+p/2) > -1/2$, so kann die Darstellung der Funktion $M_{\nu,p/2}$ unter denselben Anfangsbedingungen für $\arc v$ und $\arc(v-1)$ wie oben auch durch das einfache Schleifenintegral der Gl. (3.2a) erfolgen, da unter dieser Voraussetzung der Integrationsweg in den

$$M_{\nu,p/2}(z) = \frac{\Gamma(p+1)}{2\pi i} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1-p}{2}+\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{1+p}{2}+\nu\right)} \cdot z^{\frac{p+1}{2}} \cdot e^{z/2} \cdot \int_0^{(1+)} e^{-v\cdot z} \cdot v^{\frac{p-1}{2}+\nu} \cdot (v-1)^{\frac{p-1}{2}-\nu} \cdot \mathrm{d}\,v \quad . \quad . \quad (3.2a)$$

Nullpunkt hineinlaufen kann. Ist umgekehrt die Bedingung $\Re e\,(p/2-\nu) > -1/2$ erfüllt, so läßt sich aus der Doppelschleife eine vom Punkt 1 ausgehende einfache Schleife machen, die lediglich den Nullpunkt der v-Ebene umschlingt. Treffen schließlich die beiden letzten Ungleichungen gleichzeitig zu, so entsteht das gewöhnliche Linienintegral (3.3), das sich noch

$$M_{\nu,p/2}(z) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+\nu\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}-\nu\right)} \cdot z^{\frac{p+1}{2}} \cdot e^{-z/2} \cdot \int_0^1 (1-u)^{\frac{p-1}{2}+\nu} \cdot u^{\frac{p-1}{2}-\nu} \cdot e^{u\,z} \cdot \mathrm{d}\,u \quad (3.3),$$

$$\Re e\left(\frac{p}{2} \pm \nu\right) > -\frac{1}{2}$$

$$M_{\nu,p/2}(z) = \frac{\Gamma(p+1)}{2^p \cdot \Gamma\left(\frac{p+1}{2}+\nu\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}-\nu\right)} \cdot z^{\frac{p+1}{2}} \cdot \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\frac{p}{2}} \cdot \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{\nu} \cdot e^{(z/2)\cdot t}\, d\,t \qquad (3.3a)$$

symmetrischer in der Gestalt der Gl. (3.3a) schreiben läßt. Diese letzte Darstellungsform wird sich als besonders geeignet erweisen, wenn ν und z rein imaginär sind.

Auf Grund der Tatsache, daß nach Gl. (2.2a) die Funktion $M_{\nu,p/2}(z)$ mit der ganzen transzendenten Funktion ${}_1F_1$ in Zusammenhang steht, können zur Darstellung von $M_{\nu,p/2}$ natürlich auch solche Integrale dienen, die im wesentlichen die Funktion ${}_1F_1$ beschreiben. Das bekannteste unter ihnen, das in der Tat im vorliegendem Falle mit großem Vorteil benutzt wird, findet sich bei Watson [4] und ist in Gl. (3.4) wiedergegeben. Paßt man hierin

$$\int_0^\infty e^{-t^2} \cdot J_\mu(b\,t) \cdot t^{\gamma-1} \cdot \mathrm{d}\,t = (b/2)^\mu \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\gamma}{2}\right)}{2\cdot\Gamma(1+\mu)} \cdot {}_1F_1\left(\frac{\mu+\gamma}{2};\mu+1;-b^2/4\right) \quad . \quad . \quad . \quad (3.4)$$

die Konstanten b, μ und γ der Gl. (2.3a) an, so entsteht die zunächst nur unter der Beschränkung $\Re e\,(p/2+\nu) > -1/2$ gültige, neue Integraldarstellung (3.5). Auch hier läßt sich die die Gültigkeit einschränkende Voraussetzung durch Übergang zu Kurvenintegralen erheb-

$$M_{\nu,p/2}(z) = 2 \cdot \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+\nu\right)} \cdot z^{1/2} \cdot e^{z/2} \cdot \int_0^\infty e^{-u^2} \cdot J_p(2\,u\cdot z^{1/2}) \cdot u^{2\nu} \cdot \mathrm{d}\,u \quad . \quad . \quad . \quad (3.5)$$

lich mildern. Das kann einmal dadurch geschehen, daß man nach dem Ersatz von u^2 durch u den Integrationsweg vom Punkte $-\infty$ aus im positiven Sinne um den Nullpunkt der u-Ebene herumführt. Bemerkenswerter ist jedoch eine andere Art der Wegführung des Integrals, die von Meijer [6] angegeben worden ist. Er läßt mit dem gleichen Integranden wie in (3.5) von $-\infty$ her den Integrationsweg aus dem linken Winkelraum zwischen den beiden Hauptdiagonalen der u-Ebene oberhalb des Nullpunktes nach dem unendlich fernen Punkt des rechten Winkelraums verlaufen. Auf diese Weise entsteht dann für $M_{\nu,p/2}(z)$ die mit Ausnahme der Fälle $p=-1,-2,-3,\ldots$ und $2\nu-p=1,3,5,\ldots$ für alle Werte von z, ν und p gültige Integraldarstellung (3.6). In ihr bedeutet μ einen Phasenwinkel mit $|\arc\mu| < \pi/4$. Beim Bestehen der zu (3.5) gehörigen

$$M_{\nu,p/2}(z) = \pi^{-1} \cdot \Gamma(p+1)\,\Gamma\left(\frac{1-p}{2}-\nu\right) \cdot z^{1/2} \cdot e^{z/2-\pi i(\nu+p/2)} \cdot \int_{\infty\cdot\exp(i(\pi+\mu))}^{\infty\cdot\exp i\mu} e^{-u^2} \cdot J_p(2\,u\cdot z^{1/2}) \cdot u^{2\nu} \cdot \mathrm{d}\,u \quad (3.6)$$

Gültigkeitsbedingung läßt sich natürlich das Integral (3.6) auf das einfache Linienintegral (3.5) zurückführen. Von A. Erdelyi [7] ist die Darstellung (3.6) dazu benutzt worden, um das Verhalten der Funktion $M_{\nu,p/2}$ für große Werte von $\Re e\,\nu$ festzustellen.

4. Die allgemeinen Integraldarstellungen für die Funktion $W_{\nu,p/2}(z)$.

Gemäß den Ausführungen zu Beginn des vorigen Abschnitts müssen sich zwei weitere Partikularlösungen der Differentialgleichung (2.1) durch die beiden nachstehenden Integrale darstellen lassen. Damit darin der Integrand eine in v eindeutige Funktion ist, sind bei be-

$$f_1(z)=\frac{C_1}{2\pi i}\cdot z^{\frac{p+1}{2}}\cdot e^{z/2}\cdot\int_{\infty\cdot\exp(i\tau_a)}^{(1+)} e^{-vz}\cdot v^{\frac{p-1}{2}+\nu}\cdot(v-1)^{\frac{p-1}{2}-\nu}\cdot dv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4.1\,\alpha),$$

$$f_2(z)=\frac{C_2}{2\pi i}\cdot z^{\frac{p+1}{2}}\cdot e^{z/2}\cdot\int_{\infty\cdot\exp(i\tau_a)}^{(0+)} e^{-vz}\cdot v^{\frac{p-1}{2}+\nu}\cdot(v-1)^{\frac{p-1}{2}-\nu}\cdot dv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4.1\,\beta)$$

liebigen Werten von p und ν die beiden in Bild 2 angedeuteten, von den Punkten 0 und 1 ausgehenden Verzweigungsschnitte vorzusehen, die von den zugehörigen schleifenförmigen Integrationswegen umschlungen werden. Ferner bedeute in den obigen Integralen τ_a den Phasenwinkel von v oder $v-1$ zu Beginn des Weges. Dann ist die Bedingung (3.1a) gewiß erfüllt, solange die Ungleichung $-\pi/2<\tau_a+\arc(z)<+\pi/2$ besteht. Zugleich ist damit die Konvergenz der Integrale gesichert. Verlaufen also wie in Bild 2 die Verzweigungsschnitte in der oberen v-Halbebene, so bleiben die angegebenen Integraldarstellungen gültig für alle $\arc(z)$ mit $-3\pi/2<\arc(z)<+\pi/2$. Verlaufen sie in der unteren v-Halbebene, so muß $-\pi/2<\arc(z)<+3\pi/2$ sein.

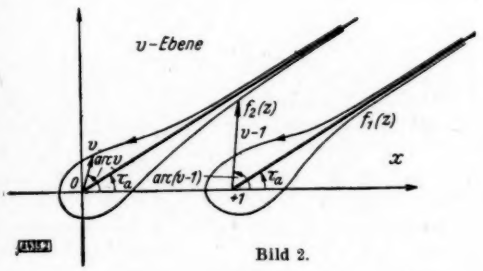


Bild 2.

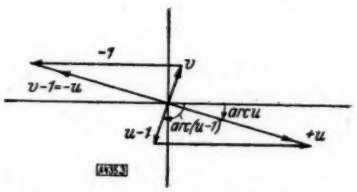


Bild 3. Die Phasenwinkel von v und u zählen stets von der positiv reellen Achse aus, und zwar positiv im mathematisch positiven Sinne.

Mit der Wahl der Konstanten $C_1=-\Gamma\left(\nu+\frac{1-p}{2}\right)\cdot\exp\left(\pi i\left(\nu+\frac{1-p}{2}\right)\right)$ wird in der heute üblichen Bezeichnungsweise die Funktion $f_1(z)$ identisch mit der Funktion $W_{\nu,p/2}(z)$. Es gilt also bei einem geeignet gewählten $|\tau_a|<\pi$ im ganzen Winkelbereich $|\arc z|<3\pi/2$ die Beziehung

$$W_{\nu,p/2}(z)=-\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1-p}{2}\right)}{2\pi i}\cdot z^{\frac{p+1}{2}}\cdot e^{z/2+\pi i\left(\nu+\frac{1-p}{2}\right)}\cdot\int_{\infty\cdot\exp(i\tau_a)}^{(1+)} e^{-v\cdot z}\cdot v^{\frac{p-1}{2}+\nu}\cdot(v-1)^{\frac{p-1}{2}-\nu}\cdot dv \quad (4.1).$$

Die Darstellung (4.1) versagt scheinbar, wenn $\nu+(1-p)/2=0,-1,-2,\ldots$ wird. Dieser Umstand ist jedoch nicht wesentlich, denn für ein $\Re e\,(+\nu-p/2)<+1/2$ darf der Integrationsweg in (4.1) sowieso in den Nullpunkt der u-Ebene hineinverlegt und aus der Schleife ein geradliniger Integrationsweg gemacht werden. Die auf diese Weise entstehenden besonderen Integraldarstellungen sind nach naheliegenden Änderungen der Integrationsvariablen in den Gl. (4.1a, b) wiedergegeben.

$$W_{\nu,p/2}(z)=\frac{z^{\frac{p+1}{2}}\cdot e^{-z/2}}{\Gamma\left(\frac{1+p}{2}-\nu\right)}\cdot\int_{0}^{\infty\cdot\exp(i\tau_a)} t^{-\nu+\frac{p-1}{2}}\cdot(1+t)^{\nu+\frac{p-1}{2}}\cdot e^{-zt}\cdot dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4.1a),$$

$$\left(|\arc(z)+\tau_a|<\pi/2,\ \Re e\left(\nu+\frac{1-p}{2}\right)<1\right)$$

$$W_{\nu,p/2}(z)=\frac{z^{\frac{p+1}{2}}}{2^p\cdot\Gamma\left(\frac{p+1}{2}-\nu\right)}\cdot\int_{1}^{\infty\cdot\exp(i\tau_a)}(t^2-1)^{\frac{p-1}{2}}\cdot\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^{\nu}\cdot e^{-(z/2)\cdot t}\cdot dt \quad . \quad . \quad . \quad (4.1b).$$

In dem zweiten Integral $f_2(z)$ setzen wir $v = -u+1$ und also $v-1 = -u$. Dann geht mit dieser Substitution, da in Rücksicht auf die zu Bild 3 angegebene positive Zählrichtung von u und $u-1$

$$\arc(-u+1) = \arc(v) = \arc(u-1) + \pi \quad \text{und} \quad \arc(-u) = \arc(v-1) = \arc(u) + \pi$$

zu wählen ist, das Integral (4.1β) in die Gestalt der Gl. (4.2') über. Das hierin vorkommende Integral entspricht aber gemäß Gl. (4.1) hinsichtlich der Führung seines Weges und des Aufbaus seines Integranden, dem Integranden für die Funktion $W_{-\nu,p/2}(-z)$. Dabei ist offenbar $-z$ auf Grund der oben angebenen Konvergenzbereiche der beiden Integrale $f_1(z)$ und $f_2(z)$ mit $z \cdot e^{+\pi i}$ zu identifizieren. Mit $C_1 = C_2$ ist daher

$$f_2(z) = +\frac{C_2 \cdot e^{\pi i p}}{2\pi i} z^{\frac{p+1}{2}} \cdot e^{-z/2} \cdot \int_{\infty \cdot \exp(i\tau_a - i\pi)}^{(1+)} e^{-(-z)\cdot u} \cdot u^{\frac{p-1}{2} - \nu} \cdot (u-1)^{\frac{p-1}{2} + \nu} \cdot \mathrm{d}u \quad . \quad . \quad . \quad (4.2')$$

$$f_2(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1-p}{2} + \nu\right)}{\Gamma\left(\frac{1-p}{2} - \nu\right)} \cdot e^{+2\pi i \nu + \pi i (p-1)/2} \cdot W_{-\nu,p/2}(z \cdot e^{+\pi i}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4.2).$$

Kann wegen $\Re e\,(\nu + p/2) > -1/2$ der Integrationsweg in den Nullpunkt hineingeführt werden, so läßt sich das Integral (4.1β) für $f_2(z)$ in ein einfaches Linienintegral überführen, und man erhält dann die Gl. (4.2a), in der v durchweg die Phase τ_a hat.

$$W_{-\nu,p/2}(z \cdot e^{+\pi i}) = -\frac{(z \cdot e^{-\pi i})^{\frac{p+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2} + \nu\right)} \cdot e^{z/2} \cdot \int_0^{\infty \cdot \exp(i\tau_a)} e^{-vz} \cdot v^{\frac{p-1}{2} + \nu} \cdot (v-1)^{\frac{p-1}{2} - \nu} \cdot \mathrm{d}v \quad . \quad . \quad . \quad (4.2a).$$

Zum Beweise der wichtigen Beziehung (2.9) möge nun für ein z mit $-3\pi/2 < \arc(z) < +\pi/2$ der Schleifenweg in Gl. (3.2a) etwa in der Mitte zwischen den Punkten 0 und 1 in die obere v-Halbebene hineingezogen und in der durch den Phasenwinkel τ_a festgelegten Richtung ins Unendliche geführt werden. Wegen der Voraussetzung über arc (z) ist das ohne Gefährdung der Konvergenz des Integrales möglich. Nach der Durchführung dieses Prozesses haben wir es dann in der v-Ebene mit zwei getrennten Integrationswegen zu tun. Der eine dieser Wege besteht aus einer Schleife, die den Punkt $+1$ im mathematisch positiven Sinne umschlingt. Infolge der für Gl. (3.2a) geltenden Voraussetzung hat dabei am Anfang der Schleife arc $(v-1)$ einen Phasenwinkel, der gegenüber dem im Integral für $f_1(z)$ um -2π kleiner ist. Von dem dadurch erforderlich werdenden Faktor abgesehen stellt aber dieses Integral gemäß der Gl. (4.1) die Funktion $W_{\nu,p/2}$ dar. Das zweite der oben erhaltenen Integrale besteht aus zwei in den Nullpunkt der v-Ebene einmündenden Wegen, auf denen sich wiederum die Phasenwinkel von $v-1$ untereinander um den Winkel 2π unterscheiden. Nach Gl. (4.2a) ist dieses Integral durch die Funktion $W_{-\nu,p/2}(-z)$ darstellbar. Die Zusammensetzung dieser beiden Teilergebnisse im Sinne der an der einfachen Schleife vorgenommenen Zerlegung führt unmittelbar zu der Gl. (2.9), die damit für den Winkelbereich $-3\pi/2 < \arc(z) < +\pi/2$ unter der Voraussetzung eines $\Re e\,(\nu + p/2) > -1/2$ bewiesen ist. Nach dem Prinzip der analytischen Fortsetzung überträgt sich dieses Ergebnis sofort auch auf den Fall beliebiger Werte von ν und p. Geht man von vornherein von der Darstellung (3.2) für $M_{\nu,p/2}$ durch eine Doppelschleife aus, so läßt sich auch schon der Beweis selbst von der obigen Beschränkung hinsichtlich der ν und p befreien. Ganz analog gelingt der Nachweis für die Richtigkeit der Gl. (2.9) innerhalb des Winkelbereichs $-\pi/2 < \arc(z) < 3\pi/2$, indem man die Schleife in Gl. (3.2a) in die untere v-Halbebene hineinzieht. Für ein z mit $|\arc(z)| < \pi/2$ sind daher zwei Deutungen möglich.

Eine andere allgemeine Folgerung aus Gl. (4.1) betrifft den Sonderfall $\nu = n + (p+1)/2$ mit positiv ganzzahligen oder verschwindenden Werten von n. In diesem Fall kann nämlich der Integrationsweg von (4.1) zu einer in sich geschlossenen, den Punkt $v = 1$ umschlingenden Kurve gemacht werden. Die Auswertung des Integrals führt durch Entwicklung von $t+1$ nach Potenzen von $t = v-1$ wieder zum Laguerre-Polynom. Damit ist für diese Polynome

$$L_n^{(p)}(z) = (-)^n \cdot \frac{e^{z/2}}{\Gamma(n+1)} \cdot z^{-\frac{1+p}{2}} \cdot W_{n+\frac{p+1}{2},\frac{p}{2}}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int^{(0+)} t^{-n-1} \cdot (1+t)^{n+p} \cdot e^{-tz} \cdot \mathrm{d}t \quad . \quad . \quad (4.3)$$
$$(|t| < 1) \quad n = 1, 2, 3 \ldots p \text{ bel.}$$

die Integraldarstellung (4.3) entstanden, und es hat sich nebenbei ergeben, daß sie für ganzzahlige Werte von n die nachstehend angeführten beiden Darstellungen durch die Wellenfunktionen m und w gestatten.

$$\left.\begin{aligned} L_n^{(p)}(z) &= (2/\pi)^{1/2}\cdot\frac{\Gamma(p+n+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(p+1)}\cdot e^{z/2}\cdot z^{-p/2}\cdot m^{(p)}_{n+\frac{p+1}{2}}(z) \\ &= (-)^n\cdot(2/\pi)^{1/2}\cdot\frac{z^{-p/2}}{\Gamma(n+1)}\cdot e^{z/2}\cdot w^{(p)}_{n+\frac{p+1}{2}}(z) \end{aligned}\right\} \quad (4.3\,\text{a, b}).$$

An weiteren Integralen für die Funktion $W_{\nu,p/2}(z)$ kommen wir darnach zu denen, die den Beziehungen (3.5) und (3.6) für $M_{\nu,p/2}(z)$ entsprechen. Hier knüpft man nach A. Erdelyi [8] am besten an das Integral (3.6) an. Hat p zunächst einen ganz beliebigen Wert, so ist es jedenfalls statthaft, die Definitionsgleichung (2.5a) für $W_{\nu,p/2}(z)$ anzuwenden. Geht man hierin mit der Gl. (3.6) ein, so treten in dem vereinigten Integral die Besselschen Funktionen J_p und J_{-p} gerade in derjenigen Kombination auf, in der sie die Hankelsche Funktion definieren. Es entsteht somit die Integraldarstellung (4.4). An ihr läßt sich auf Grund einer bekannten Eigenschaft der Hankelschen Funktionen erneut die Richtigkeit von Gl. (2.7) nachweisen.

$$W_{\nu,p/2}(z) = z^{1/2}\cdot e^{z/2+\pi i\left(\frac{p+1}{2}-\nu\right)}\int\limits_{\infty\exp(n+\mu)i}^{\infty\cdot\exp\mu i} e^{-u^2}\cdot H_p^{(1)}(2u\cdot z^{1/2})\cdot u^{2\nu}\cdot\mathrm{d}u \quad |\arg\mu|<\pi/4 \quad (4.4).$$

Zwei ganz andersartige Integraldarstellungen stammen von E. Barnes und dem Verfasser. Zu der ersten [3] gelangt man, indem man in der Gl. (4.1a) das Binom $(1+t)^{\nu+(p-1)/2}$ durch das Mellinintegral (4.5) ersetzt. Wegen der absoluten Konvergenz der Integrale ist

$$(1+t)^{\nu+\frac{p-1}{2}}\cdot\Gamma\left(-\nu+\frac{1-p}{2}\right)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{-\infty i}^{+\infty i}\Gamma\left(s-\nu+\frac{1-p}{2}\right)\Gamma(-s)\cdot t^s\cdot\mathrm{d}s \quad |\arg t|<\pi \quad (4.5)$$

in dem entstehenden Doppelintegral die Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen zulässig. Das innere Integral läßt sich dann nach einer bekannten Formel durch Gammafunktionen ausdrücken. Man gelangt so unmittelbar zu der Formel (4.6). Der Integrationsweg ist in diesem und in den meisten ähnlichen Integralen dieser Art so zu führen, daß die

$$\left.\begin{aligned} W_{\nu,p/2}(z) &= \frac{z^\nu\cdot e^{-z/2}}{\Gamma\left(-\nu+\frac{1-p}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+\frac{1+p}{2}\right)} \\ &\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty i}^{+\infty i}\Gamma(-s)\,\Gamma\left(s-\nu+\frac{1-p}{2}\right)\Gamma\left(s-\nu+\frac{1+p}{2}\right)\cdot z^{-s}\cdot\mathrm{d}s \quad |\arg z|<\frac{3\pi}{2} \end{aligned}\right\} \quad (4.6)$$

beiden nach rechts und links ins Unendliche gehenden Polketten der Integranden, nötigenfalls durch Bildung von Schleifen, auf verschiedene Seiten des Weges zu liegen kommen. Die Beziehung (4.6) erlaubt auf besonders bequeme Weise die unmittelbare Verifikation der Gl. (2.5) und (2.6). Auch die Entwicklung von $W_{\nu,p/2}(z)$ für große Werte von z läßt sich sehr leicht [3] aus ihr gewinnen. Wegen der vor dem Integralzeichen stehenden Gammafunktionen bricht die aus (4.6) hervorgehende Reihenentwicklung bereits nach einer endlichen Zahl von Gliedern ab, wenn $\nu-(1\pm p)/2$ einer nichtnegativen ganzen Zahl gleich wird (s. Gl. (4.3)).

Die vom Verfasser a. O. benutzte Integraldarstellung vom Mellin-Typus nimmt ihren Ausgang von der Gl. (4.1b), und sie entsteht, wenn man den darin vorkommenden Quotienten $((t+1)/(t-1))^\nu$ nach Potenzen von t^2-1 entwickelt. Das gelingt am einfachsten mit Hilfe der Darstellung dieser Entwicklung durch das in Gl. (4.7) angegebene Mellinintegral für die

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{t-1}{t+1}\right)^\nu &\equiv \frac{(t^2-1)^\nu}{2^{2\nu}}\cdot\left(\frac{t+1}{2}\right)^{-2\nu}=\frac{(t^2-1)^\nu}{2^{2\nu}}\cdot{}_2F_1\left(2\nu,2\nu+1;2\nu+1;\frac{1-t}{2}\right) \\ &= \pi^{-1/2}\cdot(t^2-1)^\nu\cdot\frac{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\nu+1)}\cdot{}_2F_1\left(\nu,\nu+\frac{1}{2};2\nu+1;1-t^2\right) \\ &\qquad\qquad \Re(t)>0,\ |1-t^2|<1 \\ &= \pi^{-1/2}\nu\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\Gamma(-s)\,\Gamma(s+\nu)\,\Gamma\left(s+\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s+2\nu+1)}\cdot(t^2-1)^{\nu+s}\cdot\mathrm{d}s \\ &\qquad\qquad |\arg(t^2-1)|<\pi \end{aligned}\right\} \quad (4.7)$$

hypergeometrische Funktion von Gauß. Geht man mit dieser Beziehung wiederum in die Gl. (4.1b) ein und nimmt die auch hier zulässige Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen vor, so läßt sich das innere Integral durch die Hankelsche Funktion mit rein imaginärem Argument ausdrücken. Im ganzen ergibt sich auf diese Weise die Gl. (4.8). Löst

$$W_{\nu,p/2}(z)=-\frac{i\nu\cdot z^{1/2}\cdot e^{\pi i p/4}}{2\cdot\Gamma\left(\frac{p+1}{2}-\nu\right)}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{+\infty i}\frac{\Gamma(-s-\nu)\Gamma(s)\,\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(s+\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma(s-\nu+1)}\cdot\left(\frac{4i}{z}\right)^{s}\cdot H^{(1)}_{s+\frac{p}{2}}(iz/2)\cdot\mathrm{d}s \qquad \begin{matrix}|\arg\nu|<\pi\\ |\arg z|<\pi\end{matrix} \tag{4.8}$$

man hierin die Hankelsche Funktion in die Summe zweier Besselschen Funktionen auf, so läßt sich das Integral mit dem Faktor $J_{s+p/2}$ sowohl durch den unendlich fernen Halbkreis der rechten als auch durch den der linken Halbebene zu einem geschlossenen Weg ergänzen. Für den Faktor $J_{-s-p/2}$ ist dies nur möglich in der linken Halbebene. Auf diese Weise gelangt man zu sehr merkwürdigen Reihenentwicklungen, über die anderorts berichtet werden soll. Da für $\nu=0$ die beiden auseinander strebenden Polketten von $\Gamma(s)$ und $\Gamma(-s)$ mit ihrem ersten Pol $s=0$ zusammenfallen, so muß dieser Fall, da er die Hindurchführung des Integrationsweges zwischen den ersten Polen der beiden Ketten nicht mehr gestattet, aus dem Gültigkeitsbereich der Gl. (4.8) ausgeschlossen werden. Schiebt man aber den Integrationsweg noch vor dem Grenzübergang über den Pol $s=0$ hinweg und geht erst darnach zur Grenze über, so entsteht die bekannte Beziehung:

$$W_{0,p/2}(z)=\frac{i}{2}\cdot(\pi z)^{1/2}\cdot e^{\pi i p/4}\cdot H^{(1)}_{p/2}\left(\frac{iz}{2}\right) \tag{4.8a}$$

Schließlich erwähnen wir noch die von C. S. Meijer [9] aufgefundene Integraldarstellung (4.9), die dadurch bemerkenswert ist, daß sie im Integranden eine hypergeometrische Funktion

$$W_{\nu,p/2}(z)=\Gamma(1-a)\cdot e^{-z/2}\cdot z^{\nu}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)}e^{u}\cdot u^{a-1}\cdot{}_2F_1\left(\frac{1+p}{2}-\nu,\frac{1-p}{2}-\nu;a;\frac{u}{z}\right)\cdot\mathrm{d}u \qquad |\arg z|<\pi \tag{4.9}$$

mit einem willkürlichen Nennerparameter enthält, der nur verschieden von $-1,-2,-3,\ldots$ sein muß. Setzt man z. B. in dieser Gleichung mit nichtnegativ ganzzahligen Werten von n und p den Zeiger $\nu=n+(p+1)/2$, so reduziert sich die linke Gleichungsseite nach (4.3) im wesentlichen auf das Polynom von Laguerre. Mit $a=\frac{1+p}{2}-\nu$ entsteht dann rechts nach Übergang zu dem obigen Wert von ν die schon früher dafür angegebene Integraldarstellung (4.3). Für $a=\frac{1-p}{2}-\nu$ erhält man nach demselben Übergang die der früheren zwar gleichwertige, in ihrem Aufbau jedoch verschiedene Integraldarstellung (4.10), die sich natürlich auch auf direktem Wege gewinnen läßt.

$$L_n^{(p)}(z)=\frac{\Gamma(n+p+1)}{\Gamma(n+1)}\cdot(-1/z)^{p}\cdot\frac{1}{2\pi i}\cdot\int^{(0+)}t^{-n-p-1}\cdot(1+t)^{n}\cdot e^{-zt}\cdot\mathrm{d}t \qquad \begin{matrix}|t|<1\\ n+p=0,1,2\cdots\end{matrix} \tag{4.10}$$

Auf die große Fülle weiterer Integraldarstellungen, die vor allem von C. S. Meijer [6] aufgestellt worden sind, kann im Rahmen dieser Arbeit nicht eingegangen werden. Wir möchten hier nur noch auf zwei besonderes bemerkenswerte Ergebnisse dieser Untersuchungen hinweisen: Das ist die Erweiterung der Laplace-Transformation auf die beiden konfluenten hypergeometrischen Funktionen, die C. S. Meijer in der unter [6] zuletzt erwähnten Arbeit gelungen ist, und auf die Darstellung der Funktion $W_{\nu,p/2}(z)/z$ als die Lösung einer homogenen Integralgleichung mit den Grenzen 0 und ∞ durch J. L. Sharma [20][5]).

[5]) Die Abschnitte 5 bis 12 werden im nächsten Heft dieser Zeitschrift erscheinen.

KLEINE MITTEILUNGEN

Numerische Berechnung von

$$y(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Zur Auswertung einer theoretischen Arbeit über Sekundär-Elektronen-Emission[1]) war die Tabulierung der genannten Funktion erforderlich. Zwischen Null und 2 sind die Werte von $\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ angegeben in der Sammlung von Jahnke-Emde[2]), ihre Berechnung kann z. B. auf dem von H. G. Dawson[3]) vorgeschlagenen Weg erfolgen. Für Argumente über 2 sind uns keine Tabellen bekannt geworden; da die Formeln von Dawson hierfür schwer zu handhaben sind, haben wir einen anderen Rechnungsgang eingeschlagen, der im folgenden kurz skizziert wird. Der Faktor e^{-x^2} ist hinzugefügt, weil einmal die gewünschte Funktion in dieser Form in der Anwendung auftrat, zum anderen, weil das mit e^{-x^2} multiplizierte Integral für jedes x beschränkt bleibt, was in der Tabulierung etwas bequemer ist.

Setzt man $y = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$, so gilt für y die Differentialgleichung:

$$y' = -2xy + 1 \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Da y eine ungerade Funktion von x und $y(0) = 0$ ist, setzen wir heuristisch die Potenzreihe an

$$y = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdots \quad (2);$$

daraus

$$y' = a_1 + 3a_3 x^2 + 5a_5 x^4 + \cdots \quad (3);$$

ferner

$$2xy = 2a_1 x^2 + 2a_3 x^4 + \cdots \quad (4);$$

(3) und (4) addiert gibt:

$$y' + 2xy = a_1 + (3a_3 + 2a_1)x^2 + (5a_5 + 2a_3)x^4 + \cdots = 1 \text{ (wegen (1))}.$$

Danach bestimmen sich die Koeffizienten zu

$$a_1 = 1; \quad a_3 = -\frac{2}{3}a_1; \quad a_5 = -\frac{2}{5}a_3 \quad \ldots \quad (6)$$

usw. Man erhält also

$$y = x - x\cdot\frac{2x^2}{3} + x\cdot\frac{2x^2}{3}\cdot\frac{2x^2}{5} - x\cdot\frac{2x^2}{3}\cdot\frac{2x^2}{5}\cdot\frac{2x^2}{7} + - \cdots \quad (7).$$

Wegen ihres einfachen Bildungsgesetzes, nach dem sich jedes folgende Glied einfach aus dem vorhergehenden ableitet, ist diese für jedes x konvergente Reihe auch für die numerische Berechnung, wenigstens für $x < 2$ gut brauchbar. Für größere x ist eine andere Entwicklung vorzuziehen:

Durch partielle Integration des unbestimmten Integrals $\int e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ erhält man

$$\begin{aligned}\int e^{t^2}\,\mathrm{d}t &= \frac{e^{t^2}}{2t} + \int \frac{e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{2t^2} \\ &= \frac{e^{t^2}}{2t} + \frac{e^{t^2}}{4t^3} + \int \frac{3\cdot e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{4t^4} \text{ usw.} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!\; e^{t^2}}{k!\; 2^{2k+1}\cdot t^{2k+1}} \\ &\quad + \int \frac{(2n+1)!\; e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{n!\; 2^{2n+1}\cdot t^{2n+2}}\end{aligned} \quad (8).$$

Wegen der negativen Potenzen von t läßt sich die Grenze 0 nicht ohne weiteres einsetzen. Man nimmt daher zunächst $\int_u^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ und läßt u nach 0 gehen:

$$\begin{aligned}\int_u^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!\; e^{x^2}}{k!\; 2^{2k+1}\; x^{2k+1}} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!\; e^{u^2}}{k!\; 2^{2k+1}\cdot u^{2k+1}} \\ &\quad + \int_u^x \frac{(2n+1)!\; e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{n!\; 2^{2n+1}\cdot t^{2n+2}}\end{aligned} \quad (9).$$

In das zuletzt stehende Integral wird für e^{t^2} die Reihe $\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{t^{2\mu}}{\mu!}$ eingesetzt; wegen deren gleichmäßiger Konvergenz ist die gliedweise Integration erlaubt und man erhält, wenn man auch für e^{u^2} die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{u^{2\nu}}{\nu!}$ einführt:

$$\begin{aligned}\int_u^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!\; e^{x^2}}{k!\; 2^{2k+1}\; x^{2k+1}} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{k!\; 2^{2k+1}} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{u^{2\nu-2k-1}}{\nu!} \\ &\quad + \frac{(2n+1)!}{n!\; 2^{2n+1}} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x^{2\mu-2n-1}}{\mu!\,(2\mu-2n-1)} \\ &\quad - \frac{(2n+1)!}{n!\; 2^{2n+1}} \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{u^{2\mu-2n-1}}{\mu!\,(2\mu-2n-1)}.\end{aligned}$$

Es läßt sich zeigen, daß sich die 2. und 4. Summe für jede vorkommende negative Potenz von u identisch weghebt. Für positive Potenzen von u ist dies zwar nicht der Fall, aber auch ohne Interesse, da die entsprechenden Glieder beim Grenzübergang $u \to 0$ beliebig klein werden. Soll die Behauptung zutreffen, so muß also für eine willkürlich herausgegriffene negative Potenz von u, z. B. $u^{-2\varrho-1}$, gelten:

$$-2\varrho - 1 = 2\mu - 2n - 1 = 2\nu - 2k - 1 \quad \ldots \quad (11)$$

oder

$$\mu = n - \varrho \quad \text{und} \quad \nu = k - \varrho;$$

---

[1]) H. Schlechtweg, demnächst.

[2]) E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, Berlin 1938, S. 32.

[3]) H. G. Dawson, On the Numerical Value of $\int_0^h e^{x^2}\,\mathrm{d}x$ Proc. Lond. Mathem. Soc. Bd. 29 (1898), S. 519/22.

x	y	D	x	y	D	x	y	D
0,0	0,0000		6	0,1450		1	0,0711	
		+ 993			— 42			— 10
1	0,0993		7	0,1408		2	0,0701	
		+ 955			— 41			— 9
2	0,1948		8	0,1367		3	0,0692	
		+ 878			— 38			— 10
3	0,2826		9	0,1329		4	0,0682	
		+ 773			— 36			— 9
4	0,3599		4,0	0,1293		5	0,0673	
		+ 645			— 33			— 9
5	0,4244		1	0,1260		6	0,0664	
		+ 504			— 32			— 9
6	0,4748		2	0,1228		7	0,0655	
		+ 357			— 31			— 9
7	0,5105		3	0,1197		8	0,0646	
		+ 216			— 29			— 8
8	0,5321		4	0,1168		9	0,0638	
		+ 86			— 27			— 8
9	0,5407		5	0,1141		8,0	0,0630	
		— 16			— 26			— 8
1,0	0,5381		6	0,1115		1	0,0622	
		— 119			— 25			— 8
1	0,5262		7	0,1090		2	0,0614	
		— 189			— 24			— 7
2	0,5073		8	0,1066		3	0,0607	
		— 239			— 23			— 7
3	0,4834		9	0,1043		4	0,0600	
		— 269			— 22			— 8
4	0,4565		5,0	0,1021		5	0,0592	
		— 283			— 21			— 7
5	0,4282		1	0,1000		6	0,0585	
		— 283			— 20			— 6
6	0,3999		2	0,0980		7	0,0579	
		— 273			— 19			— 7
7	0,3726		3	0,0961		8	0,0572	
		— 258			— 18			— 7
8	0,3468		4	0,0943		9	0,0565	
		— 238			— 18			— 6
9	0,3230		5	0,0925		9,0	0,0559	
		— 217			— 17			— 6
2,0	0,3013		6	0,0908		1	0,0553	
		— 194			— 17			— 6
1	0,2819		7	0,0891		2	0,0547	
		— 174			— 15			— 6
2	0,2645		8	0,0876		3	0,0541	
		— 154			— 16			— 6
3	0,2491		9	0,0860		4	0,0535	
		— 138			— 15			— 6
4	0,2353		6,0	0,0845		5	0,0529	
		— 122			— 14			— 5
5	0,2231		1	0,0831		6	0,0524	
		— 109			— 14			— 6
6	0,2122		2	0,0817		7	0,0518	
		— 98			— 13			— 5
7	0,2024		3	0,0804		8	0,0513	
		— 88			— 13			— 5
8	0,1936		4	0,0791		9	0,0508	
		— 80			— 12			— 5
9	0,1856		5	0,0779		10,0	0,0503	
		— 73			— 12			
3,0	0,1783		6	0,0767				
		— 67			— 12			
1	0,1716		7	0,0755				
		— 61			— 11			
2	0,1655		8	0,0744				
		— 57			— 11			
3	0,1598		9	0,0733				
		— 53			— 11			
4	0,1545		7,0	0,0722				
		— 49			— 11			
5	0,1496							
		— 46						

also für ein beliebiges fest gewähltes n und $\varrho \leq n$ soll sein:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(2n+1)!}{n!\,(n-\varrho)!\,2^{2n+1}\,(2\varrho+1)}\\ &=\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{k!\,2^{2k+1}\,(k-\varrho)!}\end{aligned}\right\}. \qquad (12).$$

Diese Beziehung schreibt sich für $n=m+1$:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(2m+3)!}{(m+1)!\,(m-\varrho+1)!\,2^{2m+3}(2\varrho+1)}\\ &=\sum_{k=0}^{m+1}\frac{(2k)!}{k!\,2^{2k+1}\,(k-\varrho)!}\end{aligned}\right\}. \qquad (13)$$

und für $n=m$:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(2m+1)!}{m!\,(m-\varrho)!\,2^{2m+1}\,(2\varrho+1)}\\ &=\sum_{k=0}^{m}\frac{(2k)!}{k!\,2^{2k+1}\,(k-\varrho)!}\end{aligned}\right\}. \qquad (14)$$

(14) von (13) subtrahiert, gibt nach Vereinfachung die leicht nachzuprüfende Identität:

$$\left.\begin{aligned}&(2m+3)!-(2m+1)!\,(m+1)\,(m-\varrho+1)\\ &\cdot 4=(2m+2)!\,(2\varrho+1)\end{aligned}\right\}. \qquad (15).$$

Da die Beziehung (12) für $n=0$ richtig ist, gilt sie durch vollständige Induktion für jedes n, womit die Behauptung bewiesen ist.

Man erhält also nach Zufügen des Faktors e^{-x^2} zu (10):

$$\left.\begin{aligned}y&=e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt\\ &=\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{k!\,2^{2k+1}}\cdot\frac{1}{x^{2k+1}}\\ &+\frac{(2n+1)!\,e^{-x^2}}{n!\,2^{2n+1}}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{x^{2\mu-2n-1}}{(2\mu-2n-1)\cdot\mu!}\end{aligned}\right\} \qquad (16).$$

Die Entwicklung besteht also aus zwei Teilen, einer bei dem Glied mit dem Index n abgebrochenen (bei Fortsetzung semikonvergenten) fallenden Potenzreihe in x, deren einzelne Glieder eine gewisse Ähnlichkeit mit den reziproken Gliedern der Reihe (7) aufweisen, und einem Restglied, das seinerseits aus einer mit e^{x^2} multiplizierten, für jedes x konvergenten Potenzreihe besteht, deren erste $n+1$ Glieder negativ sind.

An sich ist natürlich der Wert von y nicht davon abhängig, welches n gewählt wird, oder m. a. W. wie viele Glieder der fallenden Potenzreihe man nimmt, da deren (aus lauter positiven Summanden bestehende) Summe durch das Restglied auf jeden Fall auf den wahren Wert von y ergänzt wird. Es ist indessen zweckmäßig, die semikonvergente Reihe mit dem kleinsten Glied abzubrechen, dann ist der absolute Betrag des Restes kleiner als dieses. Hierzu hat man für n die nächste unter x^2 liegende ganze Zahl zu wählen.

Zur Abschätzung des bei günstiger Wahl von n zu erwartenden Restes kann man in Formel (16) für das letzte Glied

$$A_n=\frac{(2n)!}{n!\,2^{2n+1}\cdot x^{2n+1}}$$

an Stelle der Fakultät die Stirlingsche Näherung

$$z!\sim\frac{\sqrt{2\pi}\cdot z^{z+1/2}}{e^z}$$

einführen und erhält mit $n=x^2$:

$$A_n\sim\frac{e^{-x^2}}{x\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{x\cdot\sqrt{2}}\cdot 10^{-0{,}43\cdot x^2} \qquad (18);$$

der Rest ist also für

$x=$	2	3	4	5

kleiner als $6{,}7\cdot10^{-3}$; $3{,}1\cdot10^{-5}$; $2{,}4\cdot10^{-8}$; $2{,}9\cdot10^{-12}$.

Die mit dem kleinsten Glied abgebrochene halbkonvergente Reihe (16) liefert demnach ohne Berücksichtigung des Restes den Wert von y bei $x=2$ auf etwa 2, bei $x=3$ auf 4, bei $x=4$ auf 7 und bei $x=5$ auf 11 Dezimalstellen genau.

Zur Aufstellung der Zahlentafel wurden die Funktionswerte für die durch 0,1 teilbaren x unmittelbar auf 8 Dezimalen berechnet, und zwar bis $x=2$ nach Formel (7), für $x>2$ nach Formel (16); für $x>4$ brauchte das Restglied nicht mehr berücksichtigt zu werden.

Essen. F. Stäblein und R. Schläfer. 439

Über Massenpunktverteilungen konstanter Trägheit auf der Kugel. Die vorliegenden Bemerkungen beziehen sich auf das Problem, die Masseneinheit diskontinuierlich so auf der Oberfläche der Einheitskugel zu verteilen, daß die axialen Trägheitsmomente für alle durch den Kugelmittelpunkt hindurchgehenden Achsen gleich groß ausfallen. Bei einer vorgegebenen Massenverteilung gibt es mindestens eine Achse, für die das Trägheitsmoment den größten Wert erreicht. Jede Lösung der oben gestellten Aufgabe liefert eine Verteilung der Masse 1 auf der Einheitskugelfläche der Eigenschaft, daß das oben bezeichnete größte Trägheitsmoment seinen kleinsten noch möglichen Wert annimmt. Der Minimalwert dieses Trägheitsmaximums ist

$$\lambda_0=\frac{2}{3}.$$

Ist der Kugelmittelpunkt Ursprung eines ortnogonalen Koordinatensystems, und bezeichnen wie üblich für eine Verteilung der Massen m

$$A=\Sigma\, m\,(y^2+z^2),$$
$$B=\Sigma\, m\,(z^2+x^2),$$
$$C=\Sigma\, m\,(x^2+y^2)$$

die axialen Trägheitsmomente der Koordinatenachsen,

$$D=\Sigma\, m\,y\,z,$$
$$E=\Sigma\, m\,z\,x,$$
$$F=\Sigma\, m\,x\,y$$

die Deviationsmomente, so sind die drei Momente

$$\lambda_1\leq\lambda_2\leq\lambda_3$$

der Trägheitshauptachsen bekanntlich durch die drei reellen Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\begin{vmatrix}A-\lambda & -F & -E\\ -F & B-\lambda & -D\\ -E & -D & C-\lambda\end{vmatrix}=0$$

gegeben. Für eine Verteilung der Masseneinheit auf der Einheitskugel ist

$$\Sigma m = 1, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

also

$$A + B + C = 2,$$

und nach der bekannten Beziehung

$$A + B + C = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

schließt man auf

$$\lambda_3 \geqq \lambda_0 = \frac{2}{3}$$

für irgendeine beliebige Massenverteilung. Eine Lösung unserer Aufgabe liegt dann vor, wenn alle drei Wurzeln der charakteristischen Gleichung zusammenfallen, d. h. wenn

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{2}{3}$$

ist. Das Trägheitsellipsoid ist in diesem Falle eine Kugel, und alle axialen Trägheitsmomente sind gleich. Gibt es nun diskontinuierliche Massenverteilungen, welche das leisten? — Es dürfte eine bekannte Tatsache sein, daß eine gleichmäßige Verteilung der Masse auf die Eckpunkte eines der Kugel einbeschriebenen regulären Körpers eine Lösung darstellt. Dies kann auf Grund geeigneter Sätze über die regulären Körper leicht eingesehen werden [1]). So ergeben sich Lösungen des Problems für die Massenpunktzahlen

$$n = 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 20.$$

Wir zeigen jetzt, daß es für alle $n \geqq 2$ sehr einfach geartete Lösungen gibt. Damit wird eine Eigenschaft des regulären Vielecks im Raum aufgezeigt.

Für jedes $n \geqq 2$ wird durch

$$\left.\begin{aligned} m_\nu &= \frac{1}{n} \\ x_\nu &= \sqrt{\frac{2}{3}} \cos\frac{2\nu\pi}{n} \\ y_\nu &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sin\frac{2\nu\pi}{n} \\ z_\nu &= \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}\right\} \quad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots\ n)$$

eine Lösung gegeben. Es handelt sich um die Eckpunkte eines regulären n-Ecks, das dem Schnittkreis der Einheitskugel mit einer Ebene im Abstand $1/\sqrt{3}$ vom Mittelpunkt einbeschrieben ist. Dieser Kreis hat den Radius $\sqrt{2}/\sqrt{3}$, vgl. Bild 1.

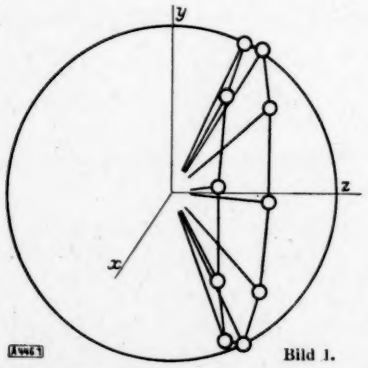


Bild 1.

[1]) Vgl. H. Hadwiger: Über ausgezeichnete Vektorsterne und reguläre Polytope. Comm. math. helv. Bd. 13 (1940/41), S. 90 bis 107, bes. S. 101 bis 103.

In der Tat ist in diesem Fall

$$A = \frac{1}{3n} \sum_{\nu=1}^{n} \left(2\sin^2\frac{2\nu\pi}{n} + 1\right) = \frac{2}{3},$$

$$B = \frac{1}{3n} \sum_{\nu=1}^{n} \left(2\cos^2\frac{2\nu\pi}{n} + 1\right) = \frac{2}{3},$$

$$C = \frac{2}{3n} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\cos^2\frac{2\nu\pi}{n} + \sin^2\frac{2\nu\pi}{n}\right) = \frac{2}{3},$$

und

$$D = \frac{\sqrt{2}}{3n} \sum_{\nu=1}^{n} \sin\frac{2\nu\pi}{n} = 0,$$

$$E = \frac{\sqrt{2}}{3n} \sum_{\nu=1}^{n} \cos\frac{2\nu\pi}{n} = 0,$$

$$F = \frac{2}{3n} \sum_{\nu=1}^{n} \cos\frac{2\nu\pi}{n} \sin\frac{2\nu\pi}{n} = 0.$$

Die charakteristische Gleichung hat die Gestalt

$$\left(\frac{2}{3} - \lambda\right)^3 = 0,$$

und liefert so die weiter oben erwähnten zusammenfallenden drei Wurzeln.

Man kann formal $n \to \infty$ gehen lassen, und strebt so einer Massenverteilung längs des oben bezeichneten Kreises auf der Kugel entgegen, welche eine Lösung des Problems für kontinuierliche Massenverteilungen darstellt.

Bern. H. Hadwiger. 446

Der Näherungswert $\pi = \frac{1}{3}\left(\sqrt{141} - \sqrt{6}\right)$.

Im Folgenden wird eine vereinfachte Darstellung des vom Verfasser gefundenen Näherungswertes für π gegeben [1]).

Man zeichne den Einheitskreis um den Nullpunkt und den Kreis durch den Nullpunkt um den Punkt $x_2 = +2,\ y_2 = 0$

$$x^2 + y^2 = 4x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

der den Einheitskreis in $A\left(\frac{1}{4},\ \sqrt{\frac{15}{16}}\right)$ schneidet.

Mit $\overline{A1} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ als Radius beschreibe man um den Punkt $x_{-1} = -1,\ y_{-1} = 0$ den Kreis

$$(x+1)^2 + y^2 = \frac{3}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

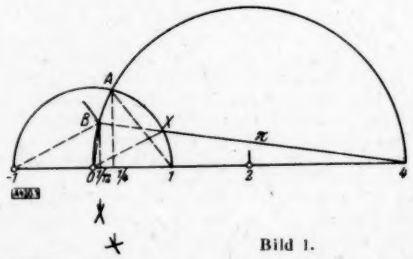


Bild 1.

[1]) Soc. Scient. Fennica, Com. Phys. Math. V, 17 (1930); Allg. Vermess.-Nachr. Bd. 45 (1933), S. 421; Acta Acad. Aboensis, Math. Phys. VIII, 8 (1935).

Dieser schneidet den Kreis (1) in einem Punkt mit der Abszisse $x_B = \frac{1}{12}$. Aus einem bekannten Satz über rechtwinklige Dreiecke, angewandt auf das Dreieck $OB4$, folgt dann, daß

$$\overline{4B} = \sqrt{4 \cdot \frac{47}{12}} = \frac{1}{3}\sqrt{141} \text{ und } OB = \sqrt{4 \cdot \frac{1}{12}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

ist. Ferner berechnet man aus dem rechtwinkligen Dreieck OXB die Strecke $\overline{BX} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$. Somit ist

$$\overline{X4} = \frac{1}{3}(\sqrt{141} - \sqrt{6}) = 3{,}1416174\cdots.$$

Die Konstruktion ergibt somit die Rektifikation des halben Einheitskreises mit einem Fehler, der kleiner als $\frac{1}{4} \cdot 10^{-4}$ ist.

Charlottenburg. A. Heiseler. 420

BUCHBESPRECHUNGEN

MARCEL **SÉDILLE,** Ingénieur A. M. et E. C. P. Docteur des Sciences, Précis de mécanique des fluides à l'usage des ingénieurs. VIII + 154 S. m. 102 Fig. Paris 1942, Verlag Dunod. Preis brosch. 105 Fr.

Dies Buch beabsichtigt, die französischen Ingenieure mit der modernen Strömungslehre bekannt zu machen. Dabei soll der Gebrauch der Mathematik möglichst eingeschränkt sein, ohne aber das Strömungsfeld in ein zu enges Schema, wie es etwa in der hydraulischen, eindimensionalen Behandlung geschieht, zu pressen. Der Verfasser kommt bei diesem schwierigen Unternehmen dadurch zum Ziel, daß er sich auf die Angabe der Ergebnisse beschränkt, sobald die mathematische Herleitung zu verwickelt erscheint. Beispielsweise werden die Navier-Stokesschen Differentialgleichungen und die durch Reibung dissipierte Energie einfach hingeschrieben. Dafür wird der physikalische Sinn der Formeln gründlich erörtert. Durch weitgehende und folgerechte Anwendung der Ähnlichkeitsmechanik wird der Überblick über den verarbeiteten Stoff wesentlich erleichtert. Dieser ist in der Tat sehr umfangreich. Er umfaßt sowohl die klassischen Potentialströmungen mit ihren Anwendungen auf die ebene Tragflügeltheorie durch Kutta und Joukowsky als auch die Theorie der laminaren und turbulenten Strömungen durch Rohre und über Platten, selbst wenn diese rauh sind. Bei der Besprechung der turbulenten Strömungen ist recht viel Platz der durch Taylor begründeten Theorie der isotropen Turbulenz eingeräumt. Daran schließen sich Auseinandersetzungen über den Formwiderstand, den induzierten Widerstand und den Wellenwiderstand. Das vorletzte Kapitel bringt eine gute Einführung in das Verhalten kompressibler Strömungen, während das letzte Kapitel den verwickelten Fragen des Wärmeaustausches gewidmet ist.

Der Verfasser bringt keinerlei Hinweise auf Originalarbeiten, anhangsweise ist nur eine Zusammenstellung weiterführender Lehrbücher oder zusammenfassender Werke gegeben. Trotz des Fehlens des wissenschaftlichen Apparates merkt der Sachkenner auf Schritt und Tritt, mit welcher Umsicht die neueren Fortschritte berücksichtigt und zu knappen Sätzen verdichtet sind. Auf diese Weise ist ein flüssig geschriebenes Lesebuch über den eindrucksvollen Aufstieg der Strömungslehre in unserem Jahrhundert entstanden. Freilich wird damit der Leser noch nicht an die Schwelle selbständiger Entwicklungsarbeit geführt, aber er bekommt jedenfalls Bescheid, worum es bei dem weitläufigen Aufbau der modernen Hydrodynamik geht.

Dresden. W. Tollmien. 447

Dr. phil. HANS **REICHARDT,** Gesetzmäßigkeiten der freien Turbulenz. (VDI-Forschungsheft 414, Beilage zu „Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens". Ausgabe B, Bd. 13, Mai/Juni 1942.) 22 S. m. 15 Bildern. Berlin 1942, VDI-Verlag G. m. b. H. Preis brosch. 5 M.

In dieser Zeitschrift Bd. 21 (1941), S. 257 bis 264, hatte H. Reichardt eine neue Theorie derjenigen turbulenten Strömung vorgeschlagen, die unter den Begriff der freien Turbulenz zusammengefaßt werden, da sie ohne Beeinflussung durch begrenzende Wände erfolgen. Indem Reichardt die turbulente Ausbreitung des mittleren Impulses in Analogie zur molekularen Wärmeleitung setzte, gelang ihm eine mathematisch einfache und dabei verblüffend genaue Darstellung der einschlägigen Turbulenzerscheinungen. Zur weiteren Nachprüfung seiner Ansätze hat er in dem hier angezeigten Forschungsheft ein umfangreiches eigenes Beobachtungsmaterial zusammengetragen, da die vorhandenen Meßergebnisse seinen Genauigkeitsansprüchen nicht genügten. Schon der Aufsatz in dieser Zeitschrift brachte eine neue Vermessung der ebenen Strahlgrenze, die sich zwischen einem homogenen Luftstrom und der angrenzenden ruhenden Luft ausbildet. Dazu sind nun noch Messungen des ebenen und achsialsymmetrischen Kreisstrahls sowie des ebenen Windschattens gekommen. Bemerkenswert ist dabei die gute Bestätigung der theoretischen Ansätze auch im axialsymmetrischen Fall, wo die Nachprüfung bisher noch ausstand. Beim ebenen Freistrahl wurde erstmalig auch die Strömung im Außenraum, die durch das Einsaugen der Luft in den Strahl entsteht, theoretisch dargestellt.

Durch die wertvollen neuen Beobachtungsergebnisse und deren gründliche theoretische Diskussion ist dies Forschungsheft geeignet, der Turbulenzforschung neue Anregung zu geben.

Dresden. W. Tollmien. 448

Dr.-Ing. E. **MELAN,** o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Wien, Dipl.-Ing. R. **SCHINDLER,** Obering. der Waagner-Biro A.-G., Wien, Die genaue Berechnung von Trägerrosten, mit 39 Tafeln für die praktische Anwendung ausgearbeitet von Dipl.-Ing. R. Rothmayer. V + 134 S. m. 101 Abb. u. 9 Zahlentafeln. Wien 1942, Springer-Verlag. Preis brosch. 21,10 M.

Der Trägerrost ist die wichtigste Idealisierung eines Tragwerks des konstruktiven Ingenieurbaus, dessen Festigkeit jedoch zur Vereinfachung der Lösung meist ohne Rücksicht auf den zweidimensionalen Zusammenhang, also ohne Rücksicht auf die Kontinuität der Querträger nachgewiesen wird. Diese ist bisher, abgesehen von Näherungslösungen, nur bei der Beschreibung des Spannungszustandes ausgewählter Bauaufgaben mit Symmetrie nach zwei Achsen streng behandelt worden, da dann die Lösung der Aufgabe durch Belastungsumordnung weitgehend vereinfacht werden kann. Die statische Untersuchung dieser hochgradig statisch unbestimmten Tragwerke bereitet formal weder bei frei drehbarer noch bei drehsteifer Verbindung der beiden sich rechtwinklig oder schiefwinklig kreuzenden Trägerscharen Schwierigkeiten. Diese ergeben sich erst bei der numerischen Auflösung der zahlreichen linearen Verträglichkeitsbedingun-

gen. Der konstruktive Ingenieurbau kann sich jedoch gegenwärtig in seinem Streben nach wirtschaftlicher Ausbildung des Tragwerks dieser Aufgabe nicht mehr entziehen. Die zahlreichen schwerbelasteten Rostbrücken im Zuge der Reichsautobahn sind dafür gute Beispiele. Dies Bedürfnis nach einer strengen Berechnung ist nunmehr durch die ausgezeichnete Arbeit der beiden Verfasser befriedigt worden. Die Berechnung gelingt mit einigen plausiblen Annahmen über die Eintragung der äußeren Kräfte und die elastischen Eigenschaften des Trägerrostes, ohne dabei besondere Bestimmungen über die allgemeine Anordnung und die Stützung der Hauptträger und über die Anzahl der Querträger zu treffen. Die Lösung ist also umfassend und im Sinne der Baustatik streng. Sie erstreckt sich auf vorgeschriebene Lastengruppen und auf die Ableitung der Einflußlinien zur Berechnung der Grenzwerte für ausgezeichnete Schnittkräfte. Die statische Untersuchung der Verfasser führt auf ein Simultansystem von 2 homogenen Differenzengleichungen zweiter Ordnung, deren Eigenwerte und Eigenlösungen allgemein abgeleitet und für zahlreiche Sonderfälle numerisch berechnet werden. Die Trennung der Veränderlichen des Ansatzes führt auf die Berechnung des Rostes mit Hilfe eines statisch unbestimmten Hauptsystems, dem durch die Querträger zusätzlich elastisch gestützten Hauptträger, der als einfacher oder durchlaufender Balkenträger oder als Bogenträger vorgegeben sein kann. Diese Untersuchungen werden klar, ausführlich und mit großer Sorgfalt vorgetragen und an zahlreichen Beispielen für alle wichtigen Belastungsarten des konstruktiven Ingenieurbaus erläutert, so daß die Anwendung der Theorie keine Schwierigkeiten bereitet. Um die damit verbundene Arbeit zu erleichtern und die Zahlenrechnung abzukürzen, sind wertvolle Rechenvorschriften angegeben und Zahlen- und Kurventafeln für die statische Untersuchung häufig verwendeter Trägerroste ausgearbeitet worden. Damit ist eine nicht nur statisch und mathematisch interessante und lehrreiche, sondern auch für die künftige Entwicklung des konstruktiven Ingenieurbaus wertvolle Arbeit entstanden, welche die befriedigende Lösung eines wichtigen statischen Problems bedeutet. Ihr Studium wird angelegentlichst empfohlen.

Dresden. K. Beyer. 461

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Dipl.-Ing. WERNER **WIRZ,** Die Querruderwirkung bei hoher Fluggeschwindigkeit. (Sonderdruck aus der Zeitschrift „Flugwehr und -Technik, Nr. 5 und 6, 1942.) 17 S. Zürich 1942, Buchdruckerei a. d. Sihl A.-G. Preis geh. Schweizerfranken 1,50.

Dr.-Ing. habil. HANS **PFRIEM,** Nichtstationäre Wärmeübertragung in Gasen, insbesondere in Kolbenmaschinen. (VDI-Forschungsheft 413, Beilage zu „Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens", Ausgabe B, Bd. 13, März/April 1942.) 29 S. m. 9 Bildern. Berlin 1942, VDI-Verlag G. m. b. H. Preis brosch. 5 M.

Prof. Dr. A. **WITTING,** Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung. (Sammlung Göschen Bd. 147.) 121 S. m. 52 Fig. u. 309 Beispielen. Berlin 1942, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 1,62 M.

Prof. Dr.-Ing. O. **KRISCHER,** Der Wärme- und Stoffaustausch im Trocknungsgut, die analytische und graphische Behandlung der Trocknung poriger hygroskopischer Güter. (VDI-Forschungsheft 415, Beilage zu „Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens", Ausgabe B, Bd. 13, Juli/August 1942.) 22 S. m. 18 Bildern u. 5 Zahlentafeln. Berlin 1942, VDI-Verlag G. m. b. H. Preis brosch. 5 M.

Dr. WILHELM **MÜLLER,** Prof. a. d. Univ. München, Einführung in die Mechanik des Fluges, 2. neubearb. Aufl. 146 S. m. 76 Abb. Leipzig 1942, Dr. Max Jänecke Verlagsbuchhandlung. Preis brosch. 3,80 M.

Dr. techn. ERWIN **PAWELKA,** Übungen aus der Mechanik. IV + 70 S. m. 59 Abb. im Text. Wien 1942, Springer-Verlag. Preis brosch. 3,60 M.

Prof. Dr. BERNHARD **BAULE,** Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs, Bd. I, Differential- und Integralrechnung. VIII + 158 S. m. 161 Abb. Leipzig 1942, Verlag S. Hirzel. Preis kart. 7 M.

NACHRICHTEN

Zum 60. Geburtstag von F. Pfeiffer.

Am 2. Mai 1943 beging Prof. Dr. F. Pfeiffer in Stuttgart seinen 60. Geburtstag. Prof. Pfeiffer gehört zu den Mathematikern, die in ihren Bestrebungen der ZAMM ganz besonders nahestehen: Bei vielseitigem Interesse für die Fragen der reinen Mathematik gilt seine Arbeit doch in erster Linie den Beziehungen der Mathematik zu ihren Anwendungsgebieten. Diese Einstellung kommt in seinen Veröffentlichungen zum Ausdruck, die sich überwiegend mit Problemen der angewandten Mathematik und der Mechanik befassen und von denen hier nur sein schöner Artikel über Elastokinetik im Handbuch der Physik genannt sei. Sie gibt aber auch seiner Vorlesungstätigkeit das besondere Gepräge. Nach vorangehender Tätigkeit an der Technischen Hochschule Danzig und an den Universitäten Halle und Heidelberg vertritt Prof. Pfeiffer seit 1922 an der Technischen Hochschule Stuttgart die Mathematik. In der allgemeinen Vorlesung über „Höhere Mathematik" sowie in zahlreichen Spezialvorlesungen versteht er es, den angehenden Ingenieuren das notwendige mathematische Rüstzeug in einer Form zu vermitteln, die zwar stets den mathematischen Kern der Betrachtungen in den Vordergrund stellt, dabei aber nie auf die lebendige Bezugnahme zu den Anwendungen verzichtet. Daß von seinem unübertrefflich klaren Vortrag, der Anschaulichkeit und mathematische Gewissenhaftigkeit auf das glücklichste verbindet, auch der junge Mathematiker größten Gewinn hat, bezeugen zahlreiche dankbare Schüler.

Seine Freunde und Schüler verehren aber in Prof. Pfeiffer nicht nur den Forscher und Lehrer, sondern auch den gütigen und hilfsbereiten Menschen, der ihnen stets verständnisvoll entgegenkommt und wo irgend möglich seine Förderung zuteil werden läßt. Mögen Prof. Pfeiffer noch viele Jahre rüstigen Schaffens zum Nutzen unserer Wissenschaft und zur Freude aller, die ihn kennen, beschieden sein!

Rostock. F. Lösch. 471

Für den Textteil verantwortlich: Professor Dr. Fr. A. Willers, Dresden-A. 20, Dorotheenstr. 12. — Printed in Germany.
Copyright 1943 by VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7. —
Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.